2011 年高考数学试题分类解析（十）
——圆锥曲线与方程

陈发志 （浙江省杭州市第十一中学）
蔡小雄 （浙江省杭州市第二中学）
张金良 （浙江省教育厅教研室）

摘要：“圆锥曲线方程”是解析几何的重点内容，在历年的高考试题中都占有极大的比重. 2011 年的高考试题，圆锥曲线的内容在试题的设计来源、设问形式、解题方法和新课程理念符合度方面都有着鲜明的特色. 研究的目的是通过对典型例题的剖析，揭示高考试题的命题规律与趋势，从而进一步把握复习的重点与疑难点，纠正解题中的易错点，增加高考的得分点.

关键词：圆锥曲线方程；试题特点；命题趋势；数形结合

解析几何是中学数学的重点内容，它的本质是用代数的知识和方法系统地研究几何问题，通过数形结合的思想建立起代数与几何的联系，推动代数与几何的共同发展. 中学阶段的解析几何主要是圆锥曲线的知识，这类问题涉及的知识面广、综合性强、创新能力高，充分体现了中学数学的各种思想方法，成为历年来高考命题的热点和重点.

2011 年高考圆锥曲线知识在命题上继承了前几年高考命题的特点，稳步推进，继承了注重考查基础知识、基本技能和基本方法的特点，多角度、多层次地考查了学生的数学素养和学习潜能，题型和背景都是学生常见的. 同时，2011 年高考命题立意上加强了对知识本质和数学思想的考查，试题命题上更注重学生创新能力的培养. 在这块内容的命题上，虽然是“年年题相似”，但也有“岁岁题不同”，主要体现在“在平稳中谋变化，在继承中求创新”的命题思路和特点.

一、试题特点

1. 难度稳定，知识点分布合理

2011 年各省市的圆锥曲线内容以 1 道选择题、1 道填空题和 1 道解答题居多，分值在 20~27 分之间，考查的知识点约为 20 个，体现了圆锥曲线知识在整个中学学习中的重要地位. 试题知识点分布合理，难度适中，无偏题、怪题，运算量较往年有所减少，侧重于学生继续学习所应具备的数学素养和学习潜能.

2. 注重通法，重点知识常考常新

“注重通性通法，淡化特殊技巧”是数学《大纲》中坚持的命题思路，历年高考试卷都体现了这个指导思想. 2011 年延续了这个指导思想，考查学生对基本思想方法（如数形结合思想、函数与方程思想、分类讨论思想等）的考查，要求学生不仅仅有知识的积累，更要有解题方法的归纳，掌握常见的解题方法，并能研究通性通法，体会其中所蕴含的数学思想方法. 其中涉及比较多的内容和方法有以下三个方面.

（1）圆锥曲线的定义、标准方程及简单几何性质的应用，是圆锥曲线的基础内容，在 2011 年高考各地的试卷中都有这方面内容的考查. 重在考查基础知识、基本方法，多以选择题、填空题为主，为中档题目.

（2）求曲线方程的问题，所涉及的求解方法有定义法、轨迹法、待定系数法等，是高考中的常规题型，解题的关键是数形结合，建立起各变量间的等量关系.

（3）用坐标法解决简单的直线与圆锥曲线的位置关系等问题. 以直线与圆锥曲线的位置关系问题为载体，与函数、三角函数、向量、立体几何等章节的内容相结合，集中体现解析几何的基本思想和方法，体现学科间知识的横向联系.

3. 彰显本质，注重思想方法考查

对运算量的要求较前几年相比有所降低，彰显数形结合思想、坐标法思想和向量方法的考查，体现了学科知识的本质. 其中，数形结合思想和坐标法思想是统领全局的，曲线与方程的关系是讨论各种解析几何问题的基础，因此高考的命题立意上也突出了坐标法思想的核心地位，强调了数形结合思想.

收稿日期：2011–07–05
作者简介：陈发志（1982–），男，浙江温州人，中学一级教师，主要从事中学数学学科的教学与研究.

4. 纵横联系，设计知识交会题

圆锥曲线结合了函数、向量、不等式、三角函数和几何知识，是考查学生的综合运用能力的重要载体. 向量具有代数与几何的双重身份，因此解析几何与平面向量的交会整合是2011年高考命题的一个热点，如安徽卷理科的第21题、大纲全国卷理科的第21题和浙江卷理科的第17题等；涉及圆锥曲线的弦长、三角形面积的最值（定值）问题，常常可以转化为求函数的最值（定值）问题，因此三角函数、导数、不等式等知识为这类问题的解决提供了新视角. 这类问题在2011年高考中也得到体现，如北京卷理科的第19题、广东卷理科的第19题、湖南卷文科的第21题等.

二、亮点扫描

1. 注重知识发生的本源

认识和理解知识发生的本源，有助于知识体系的合理建构，《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《标准》）提到教师在整合教材的过程中要"体现知识的发生发展过程，促进学生的自主探索". 2011年的高考试题命题中也紧扣这一理念，出现了一些注重知识发生本源探究的问题.

例1 （湖北卷·理14） 如图1，直角坐标系 xOy 所在的平面为 α，直角坐标系 $x'Oy'$（其中 y' 轴与 y 轴重合）所在的平面为 β，$\angle xOx'=45°$.

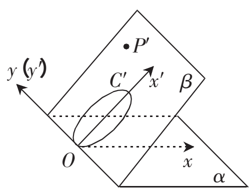

图1

(1) 已知平面 β 内有一点 $P'(2\sqrt{2}, 2)$，则点 P' 在平面 α 内的射影 P 的坐标为________；

(2) 已知平面 β 内的曲线 C' 的方程是 $(x'-\sqrt{2})^2+2y'^2-2=0$，则曲线 C' 在平面 α 内的射影 C 的方程是________.

分析：如何得到圆锥曲线？新课程从知识发生的本源来认识这个问题，教材在章头引言上提出圆锥曲线可以用一个平面截圆锥而得到，通过改变平面与圆锥轴线的夹角得到圆、椭圆、双曲线、抛物线，同时也提到椭圆可由圆经过投影而得到.

本题的命题立意正是基于此，通过二面角模型建立了平面上的曲线与其在另一个平面上的射影的关系，考查求点轨迹中"相关点法"的运用，并且注重知识发生的逆向思维，将椭圆投影到一个平面中得到了圆.

解：(1) 过点 P' 作 y 轴的垂线，垂足为 M，连接 MP，

可知 $MP=MP'\cos 45°=2$，$MO=2$，

所以点 P 的坐标为 $(2, 2)$.

(2) 可知椭圆按题意进行投影得到的曲线为圆，

则由椭圆中心 $(\sqrt{2}, 0)$ 投影到平面 α 内得到的点（圆心）坐标为（1，0），且圆的半径为椭圆短半轴长1，

可求出圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，

即曲线 C 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.

【点评】本题若按常规的"相关点法"，通过设 C' 内任意一点的坐标，然后计算其投影坐标进行求解，过程不免繁琐. 考查知识发生发展过程理解的试题，如福建卷理科第7题的讨论圆锥曲线离心率、广东卷理科第19题的求圆心轨迹方程问题，集中体现理解了知识的本质有助于避免繁琐的运算过程，切实做到减负高效.

2. 试题源于教材活于教材

回归课本，夯实基础，并非老生常谈.《标准》指出"教材是实现课程目标、实施教学的重要资源"，高中阶段的教学，要用好教材、用活教材. 2011年高考试题中出现了一些来源于教材但经过适当改变、拓展、提升的试题.

例2 （湖北卷·理20） 平面内与两定点 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$ $(a>0)$ 连线的斜率之积等于非零常数 m 的点的轨迹，加上 A_1、A_2 两点所成的曲线 C 可以是圆、椭圆或双曲线.

(1) 求曲线 C 的方程，并讨论 C 的形状与 m 值的关系；

(2) 略.

分析：该问题的第(1)问所给的动点满足到两个定点的斜率乘积为定值，给出该点的轨迹可以为圆、椭圆或者双曲线的结论. 这样的问题在选修2-1或选修1-1的教材上都能找到原型："设点 A、B 的坐标分别是 $(-5, 0)$，$(5, 0)$，直线 AM、BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$，求点 M 的轨迹."

该考题源于此例题，不仅仅考虑乘积为负数的情况，并推广到斜率之积为正数的情况，通过斜率之积的不同取值范围确定不同的曲线类型.

解：(1) 设动点为 M，其坐标为 (x, y).

当 $x\neq\pm a$ 时，

由条件可得 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x+a}=\frac{y^2}{x^2-a^2}=m$，

即 $mx^2-y^2=ma^2$ $(x\neq\pm a)$.

又因为 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$ 的坐标满足 $mx^2-y^2=ma^2$，

所以曲线 C 的方程为 $mx^2-y^2=ma^2$.

当 $m<-1$ 时，C 是焦点在 y 轴上的椭圆；

当 $m=-1$ 时，C 是圆心在原点的圆；

当 $-1<m<0$ 时，C 是焦点在 x 轴上的椭圆；

当 $m>0$ 时，C 是焦点在 x 轴上的双曲线.

【点评】在圆锥曲线的学习过程中，在掌握椭圆和双曲线的第一定义、第二定义的基础上，还应揭示第三定义（斜率乘积为定值），这样对圆锥曲线概念的比较、应用、解释就能环环相扣，形成严密的知识脉络和体系. 试题来源于教材的还有福建卷文科第18题的直线与抛物线相切问题，湖南卷文科第21题、陕西卷理科第2题的求抛物线方程问题等，这些问题思维切入点较简单，教材起到了引入知识背景的作用，解题的过程需进行拓展提升.

3. 凸显文理教学要求差异

针对文理科学生学习基础、水平上的差异，2011年数学命

题凸显了文理科试卷的差异. 在各地的试卷中，完全相同的试题只有 8 组，姊妹题（背景或设问方式相似度较高）只有 3 组（四川卷文科第 21 题和理科第 21 题、浙江卷理科第 21 题和文科第 22 题、重庆卷理科第 20 题和文科第 21 题），这样的试题设置，无疑体现了《标准》中“高中数学课程应具有多样性与选择性，使不同的学生在数学上得到不同的发展”的理念.

例 3 （浙江卷·理 21） 如图 2，已知抛物线 C_1：$x^2=y$，圆 C_2：$x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心在点 M.

（1）求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离；

（2）已知点 P 是抛物线 C_1 上一点（异于原点），过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A、B 两点，若过 M、P 两点的直线 l 垂直于 AB，求直线 l 的方程.

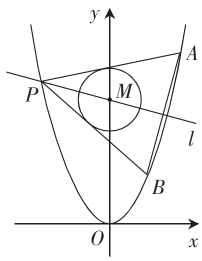

图 2

分析：第（2）问给出了三个动点，多动点一般是采用“设而不求”，设点 $P(x_0,x_0^2)$，$A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$. 直线与圆相切，考虑圆心到直线的距离等于半径，故要设切线的方程. 最后通过两直线垂直列出方程，从而表示出点 P 的坐标，进而求出直线方程. 以上都是通性通法，在运算量上也秉持解析几何问题的一贯特点——过程复杂但可整体代换.

解：（1）由题意可知，抛物线的准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，

所以圆心 $M(0,4)$ 到准线的距离是 $\frac{17}{4}$.

（2）设 $P(x_0,x_0^2)$，$A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，

则由题意得 $x_0\neq0$，$x_0\neq\pm1$，$x_1\neq x_2$.

设过点 P 的圆 C_2 的切线方程为 $y-x_0^2=k(x-x_0)$，

即 $y=kx-kx_0+x_0^2$ ①，

可知 $\frac{|kx_0+4-x_0^2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

即 $(x_0^2-1)k^2+2x_0(4-x_0^2)k+(x_0^2-4)^2-1=0$.

设 PA、PB 的斜率为 k_1，k_2（$k_1\neq k_2$），

则 k_1、k_2 是上述方程的两根，

所以 $k_1+k_2=\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}$，$k_1k_2=\frac{(x_0^2-4)^2-1}{x_0^2-1}$，

将①代入 $y=x^2$ 得 $x^2-kx+kx_0-x_0^2=0$，

由于 x_0 是此方程的根，

故 $x_1=k_1-x_0$，$x_2=k_2-x_0$，

所以 $k_{AB}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=k_1+k_2-2x_0=\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}-2x_0$，$k_{MP}=\frac{x_0^2-4}{x_0}$.

由 $MP\perp AB$，得

$k_{AB}\cdot k_{MP}=\left[\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}-2x_0\right]\left(\frac{x_0^2-4}{x_0}\right)=-1$，

解得 $x_0^2=\frac{23}{5}$，

即点 P 的坐标为 $\left(\pm\sqrt{\frac{23}{5}},\frac{23}{5}\right)$，

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3\sqrt{115}}{115}x+4$.

例 4 （浙江卷·文 22） 如图 3，设 P 是抛物线 C_1：$x^2=y$ 上的动点. 过点 P 作圆 C_2：$x^2+(y+3)^2=1$ 的两条切线，交直线 l：$y=-3$ 于 A、B 两点.

（1）求 C_2 的圆心 M 到抛物线 C_1 准线的距离.

（2）是否存在点 P，使线段 AB 被抛物线 C_1 在点 P 处的切线平分？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

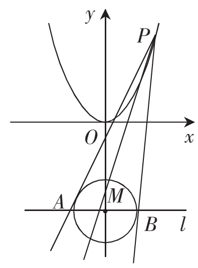

图 3

分析：本题与理科的类似，仍然是给出并设好三个动点，所涉及的关系为直线与圆相切、直线与抛物线相切、直线平分线段，思路仍为通过方程组求出点的坐标.

解：（1）因为抛物线 C_1 的准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，

所以圆心 M 到抛物线 C_1 准线的距离为 $\left|-\frac{1}{4}-(-3)\right|=\frac{11}{4}$.

（2）设点 P 的坐标为 (x_0,x_0^2).

再设 C_1 在 P 处的切线交直线 l 于点 D，A、B、D 的横坐标为 x_A，x_B，x_D，

过点 $P(x_0,x_0^2)$ 的抛物线 C_1 的切线方程为

$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$ ①.

检验当 $x_0=1$ 和 $x_0=-1$ 时，$x_D=-1$，$x_A+x_B=-\frac{2}{15}$ 或 $\frac{2}{15}$，$x_A+x_B\neq2x_D$，

故 $x_0^2-1\neq0$.

设切线 PA、PB 的斜率为 k_1，k_2，

则 PA：$y-x_0^2=k_1(x-x_0)$ ②，

PB：$y-x_0^2=k_2(x-x_0)$ ③.

联立直线 l 的方程，知

$x_D=\frac{x_0^2-3}{2x_0}$（$x_0\neq0$）；$x_A=x_0-\frac{x_0^2+3}{k_1}$；$x_B=x_0-\frac{x_0^2+3}{k_2}$（$k_1$、$k_2\neq0$），

得 $x_A+x_B=2x_0-(x_0^2+3)\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)$.

又因为 k_1、k_2 符合 $\frac{|-x_0k_1+x_0^2+3|}{\sqrt{k_1^2+1}}=1$，$\frac{|-x_0k_2+x_0^2+3|}{\sqrt{k_2^2+1}}=1$，

所以 k_1、k_2 是方程 $(x_0^2-1)k^2-2(x_0^2+3)x_0k+(x_0^2+3)^2-1=0$ 的两个不相等的根，

所以 $k_1+k_2=\frac{2(3+x_0^2)x_0}{x_0^2-1}$，$k_1\cdot k_2=\frac{(3+x_0^2)^2-1}{x_0^2-1}$，

因为 $x_A+x_B=2x_D$，

所以 $2x_0-(3+x_0^2)\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=\frac{x_0^2-3}{x_0}$，

即 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{x_0}$.

即 $\frac{2(3+x_0^2)x_0}{(x_0^2+3)^2-1}=\frac{1}{x_0}$，

解得 $x_0^4=8$，$x_0=\pm\sqrt[4]{8}$，

所以存在点 $P(\pm\sqrt[4]{8}, 2\sqrt{2})$ 满足题意.

【点评】从该组姊妹题可以看出文理科试卷在以下几个方面存在着差异.

(1) 题面形式的差异. 文科为开放性的设问方式，理科为直接求解的设问方式，形式上有所差别，但本质都为求解点 P 的坐标.

(2) 考查内容上的差异. 两者都要求通过设点、运用直线与圆相切的知识，但文科侧重线段中点坐标公式的应用，理科侧重直线垂直斜率之积为 -1 的运用.

(3) 试题分布位置的差异. 由于文科是压轴题，理科是倒数第二题，所以两者在解题方法和运算量方面都有着差别，文理科难度方面的差异在这块内容上并未得到明显的体现. 相反，综观本题，文科的运算量和转化能力、分类讨论能力的某些方面要求更甚于理科.

(4) 数学思想方面的差异. 文科的试题相比较而言，要求学生考虑问题更为细致和全面，能对 x_0 的取值进行分类讨论；理科对 x_0 的取值范围能根据题意直接得出，分类讨论的思想方法，文科在这方面的考查更为细致.

4. 突出创新应用能力的培养

《标准》中提到“高中数学课程应促进学生逐步形成和发展数学应用意识”，圆锥曲线的基本内容都有着其知识背景，体现数学的应用价值，2011 年高考数学试题在命题过程中突出体现了这一点，很多问题的常规解法可能很繁琐，如果能联系其知识背景，考虑其实际应用，往往能带来意想不到的收获.

例 5 (辽宁卷·理 20) 如图 4，已知椭圆 C_1 的中心在原点 O，长轴左、右端点 M，N 在 x 轴上，椭圆 C_2 的短轴为 MN，且 C_1、C_2 的离心率都为 e，直线 $l\perp MN$，l 与 C_1 交于两点，与 C_2 交于两点，这四点按纵坐标从大到小依次为 A，B，C，D.

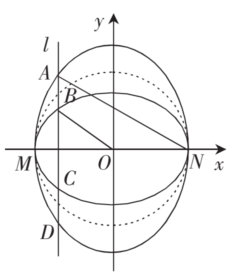

图 4

(1) 设 $e=\frac{1}{2}$，求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值；

(2) 略.

分析：本题是同离心率的两椭圆交织的模型，思维的关键点是椭圆是如何由圆上的点经过点坐标变换而得到的. 由离心率为 $\frac{1}{2}$，可知椭圆 C_1 可由圆 C 上的点的纵坐标变为原来的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，横坐标不变而得到；椭圆 C_2 可由圆 C 上的点的纵坐标变为原来的 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，横坐标不变而得到. 由此不难直接求出 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值.

解：(1) 由 C_1、C_2 的离心率都为 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

设椭圆 C_1 的长半轴长为 a，

则椭圆 C_1 可由圆 C (方程为 $x^2+y^2=a$) 上点的纵坐标变为原来的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，横坐标不变而得到；椭圆 C_2 可由圆 C 上点的纵坐标变为原来的 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，横坐标不变而得到.

所以设直线 l 与圆 C 交点的纵坐标为 y_0，

则 $|BC|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}y_0$，$|AD|=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}y_0$，

所以 $\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{\sqrt{3}y_0}{\frac{4\sqrt{3}}{3}y_0}=\frac{3}{4}$.

【点评】关键点是认识圆是如何经过坐标变化而得到椭圆，其原型是人教 A 版《普通高中课程标准实验教科书·数学 (选修 2-1)》上第 41 页的例 2. 本题要求学生能创新地应用例题蕴含的原理进行解题，考查学生对数学知识创造性应用的能力. 相同命题立意的题目如上海卷理科第 23 题，给出了全新的知识背景，要求学生能运用所学知识来求解，形式新颖，但命题立意仍紧扣《标准》.

三、典例分析

1. 性质问题

圆锥曲线的性质能直观地反映出曲线方程的内在规律，一直是高考命题的热点. 此类问题难度不大，注重考查基础知识和基本技能，解题较容易找到突破口. 在这当中以考查圆锥曲线的离心率较常见. 2011 年各地共有 14 道试题涉及离心率，客观题和主观题都有出现.

例 6 (重庆卷·文 9) 设双曲线的左准线与两条渐近线交于 A、B 两点，左焦点在以 AB 为直径的圆内，则该双曲线的离心率的取值范围为 ( ).

(A) $(0,\sqrt{2})$　　(B) $(1,\sqrt{2})$

(C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$　　(D) $(\sqrt{2},+\infty)$

分析：求圆锥曲线的离心率的范围就是求 $\frac{c}{a}$ 的取值情况，可通过一个关于 a、b、c 的方程 (不等式) 而得到比值情况，所以本题的求解关键就在于如何列出方程 (不等式)，根据左焦点在以 AB 为直径的圆内，得到左焦点到圆心的距离小于半径.

解：设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$，

可得点 A、B 的坐标为 $\left(-\frac{a^2}{c}, \pm\frac{ab}{c}\right)$.

因为直径 $|AB|=\frac{2ab}{c}$，

左焦点到 AB 中点的距离为 $\left|-c+\frac{a^2}{c}\right|=\frac{b^2}{c}$，

所以 $\frac{b^2}{c}<\frac{ab}{c}$，

得 $b<a$，即 $\frac{c^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}<2$，

离心率的取值范围为 $(1, \sqrt{2})$.

故答案选 B.

疑难点：本题在求解过程中，存在的困难点有以下三个方面. (1) 不能将“左焦点在以 AB 为直径的圆内”转化为“焦点到圆心距离和半径的大小关系”，缺少将几何问题代数化的能力. (2) 不能将所给的关于 a、b 大小关系的不等式转化为 a、c 的大小关系. (3) 忽略了双曲线的离心率必须大于 1.

2. 最值问题

圆锥曲线的最值问题，涉及较多的题型是弦长最值（北京卷理科第 19 题）、点到直线距离的最值（新课程全国卷理科第 20 题）、两点间距离最值（上海卷文科第 22 题）等. 求弦长最值问题的关键是利用公式将弦长用某个变量进行表示，通过基本不等式、导数等工具来求最值，这也是解析几何求最值问题中的基本方法.

例 7 （北京卷·理 19） 已知椭圆 G：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，过点 $(m, 0)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A、B 两点.

(1) 略；

(2) 将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求 $|AB|$ 的最大值.

分析：本题为求直线被椭圆所截得的弦长问题，通过直线与圆相切得到直线的斜率与 m 之间的关系，从而将弦长关于 m 的函数关系式表示出来，进而转化为求函数的最值.

解：(1) 略.

(2) 由题意知，$|m|\geqslant 1$.

当 $m=1$ 时，切线 l 的方程 $x=1$，点 A、B 的坐标分别为 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

此时 $|AB|=\sqrt{3}$，

当 $m=-1$ 时，同理可得 $|AB|=\sqrt{3}$.

当 $|m|>1$ 时，设切线 l 的方程为 $y=k(x-m)$，A、B 的坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2).

联立椭圆方程与切线方程得

$(1+4k^2)x^2-8k^2mx+4k^2m^2-4=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2m}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2m^2-4}{1+4k^2}$，

又由 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，得 $\frac{|km|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

即 $m^2k^2=k^2+1$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$$=\sqrt{(1+k^2)\left[\frac{64k^4m^2}{(1+4k^2)^2}-\frac{4(4k^2m^2-4)}{1+4k^2}\right]}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\,|m|}{m^2+3}.$$

由于当 $m=\pm 1$ 时，$|AB|=\sqrt{3}$，

所以 $|AB|=\frac{4\sqrt{3}\,|m|}{m^2+3}$，$m\in(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$.

因为 $|AB|=\frac{4\sqrt{3}\,|m|}{m^2+3}=\frac{4\sqrt{3}}{|m|+\frac{3}{|m|}}\leqslant 2$，

当 $m=\pm\sqrt{3}$ 时，$|AB|=2$，即 $|AB|$ 最大值为 2.

疑难点：本题在求解的过程中，学生一方面对直线与圆相切的关系把握不准，容易出错；另一方面缺少运用韦达定理简化计算的意识，运算能力的缺失也是学生中普遍存在的问题.

3. 定值问题

在圆锥曲线中，某些几何量在特定的关系结构中，不受相关变元的制约而是恒定不变的，称该几何量具有定值特征，这类问题称为定值问题. 这类问题是中学数学的重要问题，是高考命题的一个重点，它涉及面广、综合性强，极易成为失分题.

例 8 （四川卷·文 21） 如图 5，过点 $C(0, 1)$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆与 x 轴交于两点 $A(a, 0)$，$B(-a, 0)$，过点 C 的直线 l 与椭圆交于另一点 D，并与 x 轴交于点 P，直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

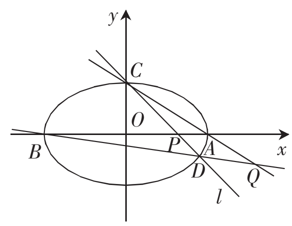

图 5

(1) 略；

(2) 当点 P 异于点 B 时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

分析：证明 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值，就是求解出 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的数值是与直线 CD 的斜率无关的常数，所以解决的关键要表示出 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$.

解：(1) 略.

(2) 当直线 l 与 x 轴垂直时与题意不符.

设直线 l 的方程为 $y=kx+1\left(k\neq 0 \text{ 且 } k\neq\frac{1}{2}\right)$，

代入椭圆方程得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=\frac{-8k}{4k^2+1}$，

代入直线 l 的方程得 $y_1=1$，$y_2=\frac{1-4k^2}{4k^2+1}$，

所以 D 点的坐标为 $\left(\frac{-8k}{4k^2+1}, \frac{1-4k^2}{4k^2+1}\right)$.

又因为直线 AC 的方程为 $\frac{x}{2}+y=1$，直线 BD 的方程为 $y=\frac{1+2k}{2-4k}(x+2)$，

联立得$\begin{cases}x=-4k,\\ y=2k+1.\end{cases}$

因此 Q 点的坐标为 $(-4k，2k+1)$.

又因为 P 点的坐标为 $\left(-\frac{1}{k}，0\right)$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{1}{k}，0\right)\cdot(-4k，2k+1)=4.$

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

疑难点：本题的解题过程中最大的困惑是如何设点，若选择将点 P 的横坐标作为自变量来求解，导致解答过程繁难，点 D 和直线 BD 的方程较复杂，运算量过大，解题半途而废.

4. 轨迹问题

求轨迹方程问题是圆锥曲线的基本问题，常见的解决方法有定义法、待定系数法、参数法、相关点转移法等. 考查的题型一般分为已知形状求轨迹方程（如北京卷文科第 19 题、陕西卷文科第 17 题）和未知形状求轨迹方程（如广东卷理科第 19 题和湖南卷文科第 19 题），其中未知形状的问题关键是如何理清题中所给的纷繁复杂的变量关系，建立各变量间的关系，通过整体代入达到消参的目的.

例 9 （安徽卷·理 21） 如图 6，设 $\lambda>0$，点 A 的坐标为 $(1，1)$，点 B 在抛物线 $y=x^2$ 上运动，点 Q 满足 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，经过点 Q 与 x 轴垂直的直线交抛物线于点 M，点 P 满足 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，求点 P 的轨迹方程.

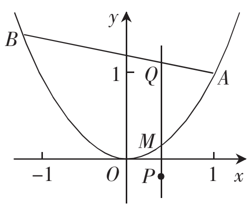

图 6

分析：本题给出多个动点，用向量关系来建立起这些动点的关系. 其中主动点为 B，点 P 为所求点. 本题的关键是通过一系列关系建立起点 P 的坐标和点 B 的坐标之间的关系，通过点 B 的坐标的方程求出点 P 的左边符合的方程.

解：由 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$ 知 Q，M，P 三点在同一条垂直于 x 轴的直线上，

故可设 $P(x，y)$，$Q(x，y_0)$，$M(x，x^2)$，

则 $x^2-y_0=\lambda(y-x^2)$，

则 $y_0=(1+\lambda)x^2-\lambda y$ ①.

设 $B(x_1，y_1)$，由 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，

即 $(x-x_1，y_0-y_1)=\lambda(1-x，1-y_0)$，

解得 $\begin{cases}x_1=(1+\lambda)x-\lambda,\\ y_1=(1+\lambda)y_0-\lambda.\end{cases}$ ②

将①式代入②式，消去 y_0，得

$\begin{cases}x_1=(1+\lambda)x-\lambda,\\ y_1=(1+\lambda)^2x^2-\lambda(1+\lambda)y-\lambda,\end{cases}$ ③

又因为点 B 在抛物线 $y=x^2$ 上，

所以 $y_1=x_1^2$，再将③式代入 $y_1=x_1^2$，得

$2\lambda(1+\lambda)x-\lambda(1+\lambda)y-\lambda(1+\lambda)=0$，

因为 $\lambda>0$，两边同除以 $\lambda(1+\lambda)$，得 $2x-y-1=0$.

故所求点 P 的轨迹方程为 $y=2x-1$.

疑难点：学生在求解过程中遇到多个动点（点 A、B、P、M、Q），多个变量关系，无法理清其主要关系，导致设了很多个变量，带来了繁杂的运算过程. 学生或者直接设点 P 的坐标，找出了点 P 坐标的含变量 λ 的参数方程，在消参方面遇到了困难.

5. 向量与解析几何结合的问题

向量具有代数与几何形式的双重身份，它是架起数与形关系的桥梁，成为中学数学知识的一个交会点，因此两者的融合交会是高考命题改革的方向和创新的趋势. 各省市出现向量背景的圆锥曲线问题共有 14 道，约占 20%，尤其是在客观题的命题上更是注重引入向量知识起到简化运算过程的作用.

例 10 （浙江卷·理 17） 设 F_1、F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点，点 A、B 在椭圆上，若 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则点 A 的坐标是__________.

分析：本题的关键是根据 $y_1^2=25y_2^2$ 转化为 $1-\frac{x_1^2}{3}=25\left(1-\frac{x_2^2}{3}\right)$，通过整体消去求出 x_1、x_2 的值.

解：可知 $F_1(-\sqrt{2}，0)$，$F_2(\sqrt{2}，0)$.

设点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $\overrightarrow{F_1A}=(x_1+\sqrt{2}，y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-\sqrt{2}，y_2)$.

由 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$ 知 $\begin{cases}x_1+\sqrt{2}=5(x_2-\sqrt{2}),\\ y_1=5y_2,\end{cases}$

又由点 A、B 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，知

$y_1^2=1-\frac{x_1^2}{3}=25y_2^2=25\left(1-\frac{x_2^2}{3}\right)$，

所以得 $\begin{cases}x_1-5x_2=-6\sqrt{2},\\ \frac{(5x_2-x_1)(5x_2+x_1)}{3}=24,\end{cases}$

得 $5x_2+x_1=\frac{72}{6\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$，

所以 $x_1=0$，$y_1=\pm1$，

所以点 A 的坐标为 $(0，\pm1)$.

疑难点：本题难点在于四个变量关系的理清，如何由 x_1、y_1 和 x_2、y_2 满足方程 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 得到 $5x_2+x_1=6\sqrt{2}$. 这也是本题的难点，分析产生难点的原因，在于学生对多变量的问题总是觉得无从下手，缺少了根据圆锥曲线方程的特点进行整体代换的意识.

四、总结提升

1. 命题趋势

圆锥曲线内容作为解析几何的核心内容，高考对本章知识的考查将继续延续前几年的命题思路和指导思想，在题型、题量、分值、难度、考查思想方法等方面不会有大的变化，总体趋势是“稳中求变、稳中求新”.

在知识点的考查方面，以下的几个内容要引起关注.

(1) 知识整合程度将越来越高.

知识点单一的问题将被多个知识点交会而成的试题所取代，尤其是在填空题和选择题上更有这个趋势. 2011 年高考近百道圆锥曲线试题中，单纯考查一个知识点的试题不足 10 道，这在一定程度上体现了高考注重在知识网络的交会处设计试题的命题方式.

(2) 直线与圆锥曲线的位置关系的问题仍将是命题热点.

同时求曲线方程、求弦长、求面积、求最值、证明某种关系、证明定值、求轨迹、求参数的取值范围、探索型、存在性讨论等问题也是常见题型. 另外，由于导数这个工具的介入，切线问题将更多地引入到综合性的问题中.

(3) 圆锥曲线试题在试卷分布有位置前倾的趋势.

加强在基本概念、基本方法、基本技能方面的考查. 对于圆锥曲线的定义、基本性质等基础知识考查的方式更为灵活，试题的命题也更为新颖.

(4) 与平面向量的关系将进一步密切.

圆锥曲线的问题将越来越多借助向量的“外衣”而出现. 平面解析几何与平面向量都具有数与形结合的特征，所以这两者多有结合，在它们的知识点交会处命题，这既是 2011 年高考命题的特点，也是今后高考命题的一个方向.

在数学素养和能力的考查方面，将延续重点考查数形结合、函数与方程等基本数学思想，同时学生基本的运算能力的考查也是命题立意所考虑的.

2. 教学启示

圆锥曲线的内容一直是中学数学学习的重点和难点，其知识点繁多，运算能力、综合性都要求很高，分析以上高考命题的特点和趋势，可以尝试在平时的教学和学习中注意以下几个方面.

(1) 夯实基础，回归课本.

《考试大纲的说明》明确指出高考数学命题的指导思想是“发挥数学作为主要基础学科的作用，要考查中学的基础知识、基本技能的掌握程度，要考查对数学思想方法和数学本质的理解水平.”因此，高考数学命题不会脱离教学的实际情况，不会脱离数学课本，2011 年的高考命题更是在多个方面贯彻了这个指导思想.

夯实基础，回归课本，要求对课本中的圆锥曲线的定义、基本性质（范围、对称性、准线方程、离心率等）理解透彻，要求回到课本中去，回到基础中去，引导学生理清知识发生的本源，帮助学生搭建高中数学基础知识的网络. 注重常规问题的基本解法，抓住通性通法. 高考试题很多是源于课本的例题、习题，因此，对于课本上的例题、习题，我们应通过充分挖掘、延伸、变式，落实对知识点的深刻理解，起到举一反三的作用.

(2) 突破重点，解决难点.

圆锥曲线的重点内容有：根据给出的曲线方程，讨论曲线的基本元素和简单的几何性质；给出曲线满足的条件，判断（或求）其轨迹；给出直线与曲线、曲线与曲线的位置关系，讨论与其有联系的有关问题（如直线的方程、弦长、曲线中参数的取值范围等）；讨论直线与曲线、曲线与曲线的关系；考查圆锥曲线与其他知识（如函数、数列、不等式、三角函数、向量、导数等）的综合. 其中难点是直线与曲线的位置关系，以及圆锥曲线与其他知识的综合问题.

重点内容应该重点突破，整理归纳出重点内容的一般求解策略. 直线与圆锥曲线的位置关系问题，其基本策略是，将其转化为直线与圆锥曲线的方程组解的问题，进而转化为一元二次方程的实根问题，判别式、韦达定理、弦长公式的应用，设而不求、整体代换、数形结合的思想方法在这里有着重要的作用.

(3) 强化运算，淡化技巧.

在几何问题代数化的过程中，必然会带来繁杂的运算，中学阶段对运算能力的要求集中体现在这里. 因此如果不能强化运算能力，就不能将思路转化为解决过程. 强化运算，也包括了运算求简意识的培养，突出“设而不求”、“整体代换消去”的特点，帮助学生在学习过程中存在重思路方法、轻运算的观念.

在运算求简的过程中，常见的方法有：回归定义，以简驭繁；设而不求，整体运算；充分运用图形几何性质，简化（或避免）计算；利用韦达定理化繁为简；选用方程适当形式，减少运算量. 这些方法可以结合具体的问题在平时的教学中进行渗透，而不必去过分追求技巧.

(4) 训练思维，提升方法.

高考试题侧重于考查知识的综合灵活运用，着眼于知识点新颖巧妙的组合，试题新而不偏，活而不过难，着眼于对数学思想方法、数学能力的考查，要求以数学思想指导知识、方法的运用，整体把握各部分知识的内在联系. 因此在学生的学习过程中要看清知识发生的本源，看透知识的形成过程、推广过程和运用过程，让学生不仅能掌握具体的数学知识，而且也能感受、领会、形成、运用内在的思想方法.

如讨论直线和圆锥曲线的位置关系的两种基本方法：一是把直线方程和圆锥曲线方程联立，讨论方程组解的情况；二是从几何图形上观察直线和圆锥曲线交点的情况. 通过方法的提升，揭示内在的数学思想方法，利用数形结合的思想方法，将使得学生对于数形结合思想的理解更透彻和深刻. 在基础知识的复习中，要充分展现知识形成发展过程，揭示其中蕴含的丰富的数学思想方法.

参考文献：

[1] 景芳，张金良. 2010 年高考数学试题（新课程卷）分类解析（十）：圆锥曲线与方程 [J]. 中国数学教育（高中版），2010（7 / 8）：66-72.

[2] 梁蝉，张金良. 2009 年高考数学试题分类解析（十三）：圆锥曲线与方程 [J]. 中国数学教育（高中版），2009（9）：22-30.