极化恒等式在解题中的妙用

■江苏省通州高级中学 马 进

一、极化恒等式的概念

极化恒等式：对于向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$.

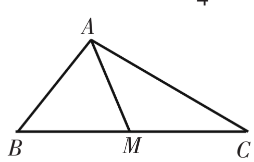
证明：因为$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

两式相减得，$(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$.

几何意义：向量的数量积可以表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线”与“差对角线”平方差的$\frac{1}{4}$.

【推论 1】极化恒等式的平行四边形形式：若在平行四边形$ABCD$中，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{DB}^2]$.



【推论 2】极化恒等式的三角形形式：在$\triangle ABC$中，M为BC的中点，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2$.

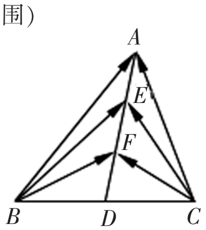
证明：M为BC的中点，所以$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MB}$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2$.

二、极化恒等式在解题中的应用

1. 利用极化恒等式求数量积的值（范围）

例 1. 如图，在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，E,F是AD上的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值是______.



解析：因为$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AD^2-BD^2=4$，

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=FD^2-BD^2=\frac{1}{9}AD^2-BD^2=-1$，

联立得$AD^2=\frac{45}{8}$，$BD^2=\frac{13}{8}$，

即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=ED^2-BD^2=\frac{4}{9}AD^2-BD^2=\frac{7}{8}$.

【点评】条件$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$和要求$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$中的数量积都是共起点的，所以我们联想到极化恒等式的三角形形式.同时，本题三次使用了极化恒等式，考查了方程思想和运算求解能力.

2. 利用极化恒等式求数量积的范围（最值）

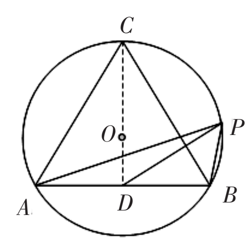
例 2. 已知等边$\triangle ABC$内接于半径为 2 的圆O，点P是圆O上的一个动点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是__________.

解析：取AB的中点D，连结CD，因为三角形ABC为正三角形，

所以O为三角形ABC的重心，O在CD上，

且$OC=2OD=2$，所以$CD=3$，$AB=2\sqrt{3}$.（也可用正弦定理求AB）

又由极化恒等式得：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PD|^2-|DB|^2=|PD|^2-3$.



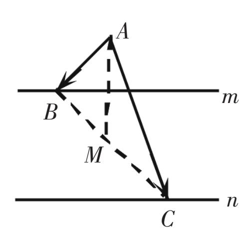
因为P在圆O上，所以当P在点C处时，$|PD|_{max}=3$.

当P在CO的延长线与圆O的交点处时，$|PD|_{min}=1$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-2,6]$.

【点评】本题巧妙的使用极化恒等式把$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的数量积转化为关于$PD$长度的目标函数，进而只要求解$PD$的取值范围.

例 3. 如图，在同一平面内，点A位于两平行直线m，n的同侧，且A到m,n的距离分别为 1，3. 点B，C分别在m，n，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=5$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最大值是______.



解析：连接BC，取BC得中点M，连接AM，

又因为$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=5$，得$|2\overrightarrow{AM}|=5$，即$|\overrightarrow{AM}|=\frac{5}{2}$，

由极化恒等式，得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2=\frac{25}{4}-\overrightarrow{MB}^2=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$.

又因为 BC 的最小值为 2，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最大值是$\frac{21}{4}$.

【点评】我们注意到$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$是共起点的向量数量积的最大值，而条件$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=5$可以得出 BC 边上的中线长度为$\frac{5}{2}$，因此，我们易联系到极化恒等式的三角形形式，进而转化为求边 BC 的最小值.

3. 构造极化恒等式求数量积的范围（最值）

例 4. 平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足$\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|\leqslant 4$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的最小值为__________.

解析：由极化恒等式，得$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}(3\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}[(3\vec{a}+\vec{b})^2-(3\vec{a}-\vec{b})^2]$

$\geqslant\frac{1}{12}[(3\vec{a}+\vec{b})^2-16]\geqslant\frac{1}{12}[0-16]=-\frac{4}{3}$,

当且仅当$\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|=4$，$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=0$时，取“=”，

则$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值为$-\frac{4}{3}$.

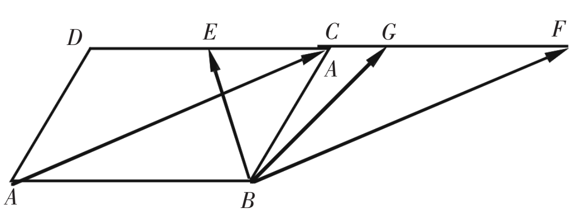
【点评】本题中设置简洁，利用常规方法比较困难.我们巧妙的将$3\vec{a}$看作一个整体，然后构造关于$3\vec{a}$与$\vec{b}$的极化恒等式，巧妙求解.

4. 利用极化恒等式解决起点不同的两向量数量积

例 5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E 为 CD 的中点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 AB 的长为____.

解析：过点 B 作 AC 的平行线，交 DC 的延长线于 F，取 EF 的中点为点 G，连接 BG，所以四边形 $ABFC$ 为平行四边形，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$，$EF=\frac{3}{2}AB$，$CG=\frac{1}{4}AB$.

在△BCG 中，由余弦定理，得 $BG^2=1+\frac{1}{16}AB^2+\frac{1}{4}AB$.



又由极化恒等式得：

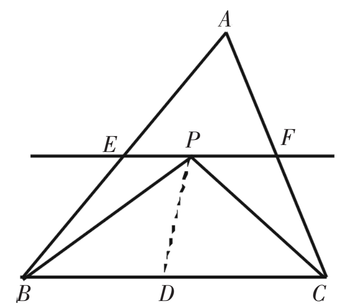
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BG}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}^2=1+\frac{1}{16}AB^2+\frac{1}{4}AB-\frac{1}{4}(\frac{3}{2}AB)^2=1$,

解得 $AB=\frac{1}{2}$.

【点评】本题的条件$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$ 中的两个向量的起点不同，通过作平行线，构造起点相同的向量的数量积，进而再利用极化恒等式求解.

5. 利用极化恒等式求综合问题

例 6. 在△ABC 中，点 E，F 分别是线段 AB，AC 的中点，点 P 在 直线 EF 上，若△ABC 的面积为 1，则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2$的最小值为____.



解析：取 BC 中点 D，连接 PD，

在△PBC 中，利用极化恒等式，得 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$，

所以$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PD}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2$.

因为△ABC 的面积为 1，所以△ABC 的边 BC 上的高 $h=\frac{2}{BC}$.

又因为点 E，F 分别是线段 AB，AC 的中点，

所以△PBC 的边 BC 上的高为$\frac{1}{BC}$，

所以 $PD\geqslant\frac{1}{BC}$，

因此$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PD}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2\geqslant\frac{1}{BC^2}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2\geqslant 3$,

（当且仅当 $PD\perp BC$，$BC=\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$ 时，取“=”），

则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2$的最小值为$\sqrt{3}$.

【点评】借助极化恒等式得出$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$是解决本题的关键，然后再利用垂线段的性质及基本不等式便可顺利求解.

三、解题后的反思

1. 极化恒等式源于教材又高于教材，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$是两个重要向量关系，而极化恒等式就是它们的变形；

2. 利用极化恒等式有时确实可以“秒杀”一些向量试题. 但是，解题中我们并不是追求高难度的解题技巧，而是多一种解题工具的选择，着意于数学问题的解决，揭示问题的本质，达到快速解决的目的.

责任编辑　徐国坚