

2019 学年第一学期五校联考试题
高三年级数学学科

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前，在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

台体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积，

h 表示台体的高

柱体的体积公式

$$V=Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积， h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积， h 表示锥体的高

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|\lg x>0\}$ ， $B=\{x|x^2\leq 4\}$ ，则 $A\cap B=$ ()
A. $(1,2)$ B. $[1,2]$ C. $(0,2]$ D. $(1,+\infty)$
2. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=2$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° ，则 ()
A. $\vec{a} \perp (\vec{a}+\vec{b})$ B. $\vec{b} \perp (\vec{a}+\vec{b})$ C. $\vec{a} \perp (\vec{a}-\vec{b})$ D. $\vec{b} \perp (\vec{a}-\vec{b})$
3. 函数 $f(x)=\frac{3^x}{3^x+2^x}$ 的值域为 ()
A. $[1,+\infty)$ B. $(1,+\infty)$
C. $(0,1]$ D. $(0,1)$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，其前 n 项和为 S_n ，则 ()

A. $d < 0$ 时, S_n 一定存在最大值

B. $d > 0$ 时, S_n 一定存在最大值

C. S_n 存在最大值时, $d < 0$

D. S_n 存在最大值时, $d > 0$

5. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 3a < 0$ 在 $(0, 2]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3})$

B. $(-\infty, \frac{4}{7})$

C. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

D. $(\frac{4}{7}, +\infty)$

6. 已知 a, b 为实数, 则 $0 < b < a < 1$, 是 $\log_a b > \log_b a$ 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 定义 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$, 则关于实数 x, y 的不等式组 $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \\ \max\{x+y, x-y\} \geq 0 \end{cases}$, 所表示的平面区域的面积是 ()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

8. 函数 $f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$), 则 $f(x)$ ()

A. 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上递增

B. 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上递减

C. 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上递减

D. 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上递增

9. 在三角形 ABC 中, 已知 $\frac{\sin A}{\sin B} + \cos C = 0$, $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $\tan B =$ ()

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若不等式 $(|x-a|-b)\sin(\pi x + \frac{\pi}{6}) \leq 0$ 对 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 则 $a+b =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{5}{6}$

C. 1

D. 2

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分。

11. 已知集合 $A = \{x | 2x^2 - x - 1 < 0\}$, $B = \{x | a < x < b\}$. 若 $A \cup B = \{x | -2 < x < 1\}$, 则

$a = \underline{\hspace{2cm}}$; 若 $(C_R A) \cap B = \{x | 1 \leq x < 3\}$, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha = 1$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 不等式 $2^{3x-1} < (\frac{1}{2})^{1-2x}$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 不等式 $\log_2(3x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 4$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = (-1)^n a_n - (\frac{1}{2})^n (n \in N^*)$, 则 $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $S_7 = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 定义 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$, 已知 $f(x) = \max\{|x+1|+1, 2x\}$, $g(x) = ax+b$, 若

$f(x) \leq g(x)$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 则 $2a+b$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$

16. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 其中 $|\vec{a}-\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{c}|=1$, $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 夹角为 60° , 且 $(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) = -1$,

则 $|\vec{a}|$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 已知实数 a, b 满足: $2b^2 - a^2 = 4$, 则 $|a-2b|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分) 已知 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos x$, $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c

(I) 若 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 的值域

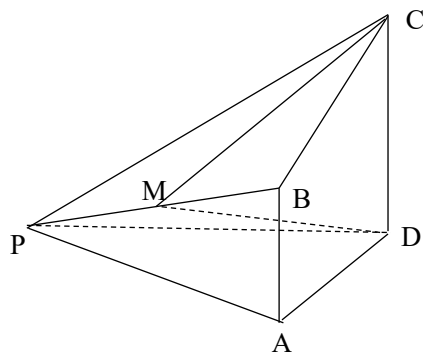
(II) 若 $f(A) = \frac{1}{3}$, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, 求 $\sin B$ 的值.

19. (本题满分 15 分) 已知多面体 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = \angle PAB = 90^\circ$,

$$AB = PA = DA = PD = \frac{1}{2}DC, M \text{ 为 } PB \text{ 中点.}$$

(I) 求证: $PA \perp CM$;

(II) 求直线 BC 与平面 CDM 所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分) 设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 若 $a_2 = b_2 = 3$, $a_3 = b_5 = 9$

(I) 若 $c_n = \frac{n \cdot b_n}{a_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 中的最大项是第 k 项, 求 k 的值;

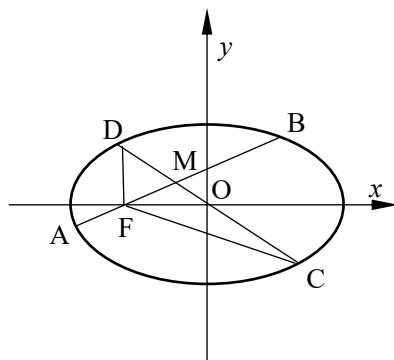
(II) 设 $d_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (本题满分 15 分) 过椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点 F 作斜率为 k_1 ($k_1 \neq 0$) 的直线交椭圆于 A, B

两点, M 为弦 AB 的中点, 直线 OM 交椭圆于 C, D 两点.

(1) 设直线 OM 的斜率为 k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值;

(2) 若 F, B 分别在直线 CD 的两侧, $|MB|^2 = |MC| \cdot |MD|$, 求 $\triangle FCD$ 的面积.



22. (本题满分 15 分) 设函数 $f(x) = e^x + a\sqrt{x+1}$, $x \geq -1$

(I) 当 $a = -1$ 时, 若 x_0 函数 $f(x)$ 的极值点, 求证: $-\frac{1}{2} < x_0 < 0$;

(II) (i) 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + a\sqrt{x+1}$

(ii) 若不等式 $2 + \frac{5}{4}x + \frac{a}{2}x^2 \leq \frac{f(x)}{a}$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

注: $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.