

2019 年江苏省中学生数学夏令营测试卷

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 计算： $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+4} =$ _____.

答案： $\frac{3}{8}$.

解析： $\frac{k}{k^4+4} = \frac{k}{(k^2+2+2k)(k^2+2-2k)} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(k-2)k+2} - \frac{1}{k(k+2)+2} \right]$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+4} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{-1 \times 1 + 2} + \frac{1}{0 \times 2 + 2} - \frac{1}{(k-1)(k+1)+2} - \frac{1}{k(k+2)+2} \right] = \frac{3}{8}$$

故填： $\frac{3}{8}$.

2. 若虚数 z 满足 $z^3 + z = 2|z|^2$ ，则 $|z| =$ _____.

答案： $\sqrt{5}$.

解析：设 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$)，则由题意

$$\begin{aligned} (x + yi)(x^2 - y^2 + 1 + 2xyi) &= 2(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3x^2 + 1 \\ x(x^2 - y^2 + 1) - 2xy^2 = 2(x^2 + y^2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $|z| = \sqrt{5}$ ，故填： $\sqrt{5}$.

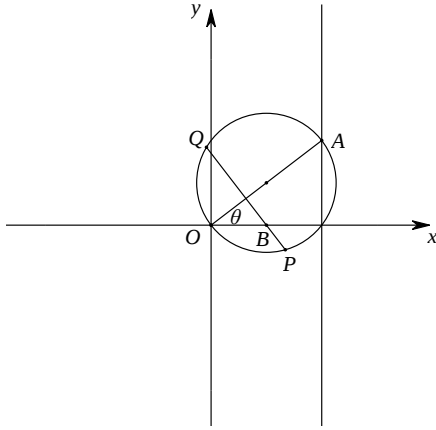
3. 设 O 为坐标原点，点 A 为直线 $x=2$ 上一动点，过点 $B(1,0)$ 作直线 OA 的垂线，与以 OA 为直径的 $\odot C$ 相交于 P, Q 两点，若线段 PQ 长为 $\sqrt{6}$ ，则 $\odot C$ 的方程为_____.

答案： $(x-1)^2 + (y \pm 1)^2 = 2$.

解析：如下图，设 $\odot C$ 半径为 r ，由圆幂定理可知

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 = \cos \theta (2r - \cos \theta) \\ \cos \theta = \frac{2}{2r} = \frac{1}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow A(2, \pm 2)$$

所以 $\odot C$ 的方程为 $(x-1)^2 + (y \pm 1)^2 = 2$ ，故填： $(x-1)^2 + (y \pm 1)^2 = 2$.



4. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 满足 $\overrightarrow{CO} = t\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t\right)\overrightarrow{CB}, t \in \mathbb{R}$, 若 $|\overrightarrow{AB}| = 3$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

答案: 9.

解析: 由题意得

$$\overrightarrow{CO} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB} \left(\alpha = \frac{t}{1+t}, \beta = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t}{1+t} \right)$$

所以

$$\frac{5}{2}\alpha + 2\beta = 1$$

而此时

$$\overrightarrow{CO} = \frac{5}{2}\alpha \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + 2\beta \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

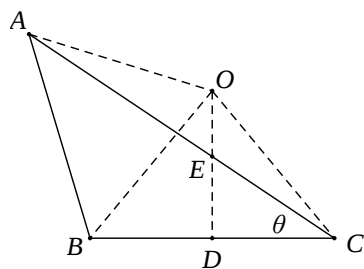
如下图所示, 则可得

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{2}{5}b} = \frac{a^2 + b^2 - 9}{2ab} \Rightarrow 2b^2 = 3a^2 + 18$$

所以

$$S_{\triangle ABC} = 5S_{\triangle CDE} = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{4}{25}b^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{8}\sqrt{-(a^2 - 72)^2 + 72^2} \leq 9$$

故填: 9.



5. 设非零实数 x, y 满足 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x^2 - y^2$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____.

答案: 4.

解析: 极坐标换元, 设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则可得

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = r^2 \cos 2\theta \Rightarrow r^2 = \frac{4}{\sin 4\theta} \geq 4$$

所以 $(x^2 + y^2)_{\min} = 4$, 故填: 4.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 150^\circ$, D 是线段 AC 上的点, $\angle DBC = 30^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 当 BD 取到最大值时, $AC =$ _____.

答案: $2\sqrt{7}$.

解析: 由题意

$$S = \frac{1}{2} ac \sin 150^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow ac = 4\sqrt{3}$$

而由张角定理可知

$$\frac{\sin 150^\circ}{BD} = \frac{\sin 120^\circ}{a} + \frac{\sin 30^\circ}{c} \Rightarrow \frac{1}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{a} + \frac{1}{c} \geq 1$$

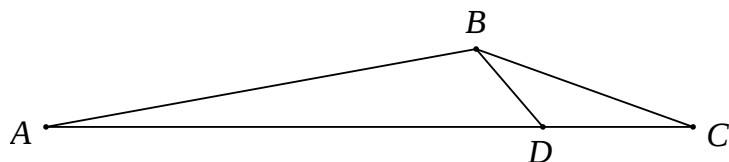
当

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{c} \\ ac = 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ c = 2 \end{cases}$$

时取等号, 此时由余弦定理

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos 150^\circ} = 2\sqrt{7}$$

故填: $2\sqrt{7}$.



7. 在 $\triangle ABC$ 中, $2\cot A + 3\cot B + 4\cot C$ 的最小值为_____.

答案: $\sqrt{23}$.

解析: 由正切恒等式

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \Rightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

换元, 设 $\cot A = x, \cot B = y, \cot C = z$, 首先证明 $2x + 3y + 4z > 0$

(1) 若 $\triangle ABC$ 为锐角或直角三角形: 显然成立;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形: 此时只需证明 $z < 0$ 的情况即可,

$$2x + 3y + 4z = 2x + 3y + \frac{4 - 4xy}{x + y} = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy + 4}{x + y} > 0$$

故

$$2\cot A + 3\cot B + 4\cot C = 2x + 3y + 4z > 0$$

设

$$(2x + 3y + 4z)^2 = t = t(xy + yz + zx) \quad (t > 0)$$

则

$$4x^2 + [(12 - t)y + (16 - t)z]x + 9y^2 + 16z^2 + (24 - t)yz = 0$$

所以

$$\Delta = [(12 - t)y + (16 - t)z]^2 - 16[9y^2 + 16z^2 + (24 - t)yz] \geq 0$$

即

$$(t - 24)y^2 + 2(t - 20)yz + (t - 32)z^2 \geq 0$$

由于求 t 的最小值, 故先考虑 $0 < t < 24$ 时的情况

$$\Delta = 4(t - 20)^2 - 4(t - 24)(t - 32) \geq 0 \Rightarrow t \geq 23$$

所以 $(2\cot A + 3\cot B + 4\cot C)_{\min} = \sqrt{23}$, 故填: $\sqrt{23}$.

8. 一个圆桌有十二个座位，编号为1至12，现有四个学生和四个家长入座，要求学生坐在偶数位，家长与其孩子相邻，满足要求的坐法共有_____种.

答案：2520.

解析：以学生入座的座位号中相邻偶数的对数分类讨论(如2, 4, 6, 8中有(2, 4), (4, 6), (6, 8)

共3对偶数相邻，其中12和2以相邻偶数处理)：

(1) 3对相邻的偶数：共 $6 \times 5 = 30$ 种情况；

(2) 2对相邻的偶数：共 $6 \times 4 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 75$ 种情况；

因此共 $A_4^4(30 + 75) = 2520$ 种情况，故填：2520.

注：记相邻 n 对偶数时，家长入座方式为 a_n ，利用递推关系易得 $a_{n+1} = a_n + 1 \Rightarrow a_n = n + 2$,

$n \in \mathbb{N}^*$.