绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共4页，23小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡的相应位置上。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x\,|-4<x<2\}$，$N=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{x\,|-4<x<3\}$　　B．$\{x\,|-4<x<-2\}$　　C．$\{x\,|-2<x<2\}$　　D．$\{x\,|\,2<x<3\}$

2．设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$(x-1)^2+y^2=1$　　C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$x^2+(y+1)^2=1$

3．已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则

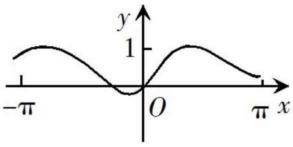
A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

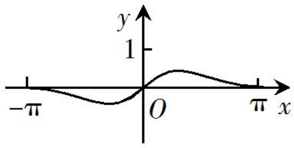
4．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长

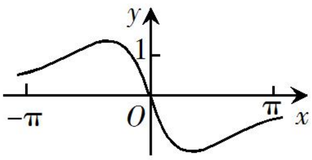
度之比也是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为105 cm，头顶至脖子下端的长度为26 cm，则其身高可能是

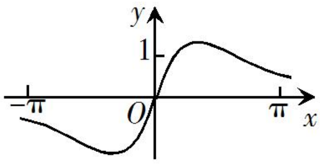
A．165 cm　　B．175 cm　　C．185 cm　　D．190 cm

5．函数$f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为

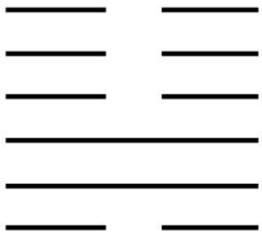
A．

B．

C．

D．

6．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有3个阳爻的概率是

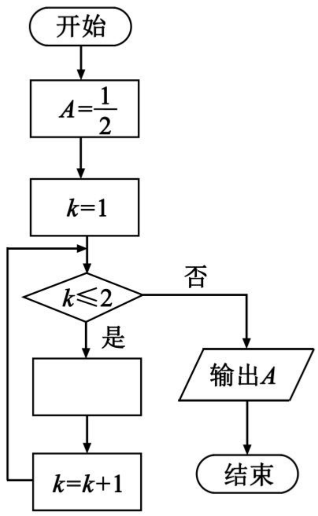


A．$\dfrac{5}{16}$　　B．$\dfrac{11}{32}$　　C．$\dfrac{21}{32}$　　D．$\dfrac{11}{16}$

7．已知非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

8．如图是求$\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$的程序框图，图中空白框中应填入



A．$A=\dfrac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\dfrac{1}{A}$　　C．$A=\dfrac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\dfrac{1}{2A}$

9．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则

A．$a_n=2n-5$　　B．$a_n=3n-10$　　C．$S_n=2n^2-8n$　　D．$S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10. 已知椭圆C的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11．关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数　　②$f(x)$在区间（$\frac{\pi}{2},\pi$）单调递增

③$f(x)$在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点　　④$f(x)$的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

12．已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，PB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为

A．$8\sqrt{6}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　D．$\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为____________．

14．记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则 S_5=____________．

15．甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是____________．

16．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别

交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

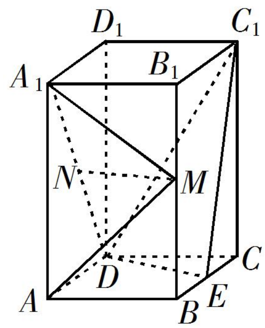
17．(12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$．

（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

18．（12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点.



（1）证明：MN∥平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A\text{-}MA_1\text{-}N$ 的正弦值.

19．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P.

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$.

20．（12 分）已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1）$f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21．（12 分）

为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X.

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

(i)证明：$\{p_{i+1}-p_i\}\ (i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

(ii)求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$．

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知 a，b，c 为正数，且满足 abc=1．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 \ge 24$．

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学•参考答案

一、选择题

1．C　2．C　3．B　4．B　5．D　6．A　7．B　8．A　9．A　10．B　11．C　12．D

二、填空题

13．y=3x　　14．$\frac{121}{3}$　　15．0.18　　16．2

三、解答题

17．解：（1）由已知得$\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得$b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

因为$0^\circ<A<180^\circ$，所以$A=60^\circ$.

（2）由（1）知$B=120^\circ-C$，由题设及正弦定理得$\sqrt{2}\sin A+\sin\left(120^\circ-C\right)=2\sin C$，

即$\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得$\cos\left(C+60^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由于$0^\circ<C<120^\circ$，所以$\sin\left(C+60^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$\sin C=\sin\left(C+60^\circ-60^\circ\right)$

$=\sin\left(C+60^\circ\right)\cos 60^\circ-\cos\left(C+60^\circ\right)\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

18．解：（1）连结B_1C，ME.

因为M，E分别为BB_1，BC的中点，

所以$ME\parallel B_1C$，且$ME=\dfrac{1}{2}B_1C$.

又因为N为A_1D的中点，所以$ND=\dfrac{1}{2}A_1D$.

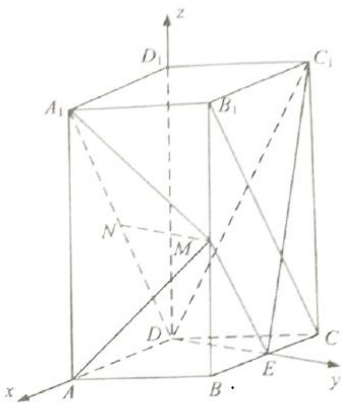
由题设知$A_1B_1 \underline{\parallel} DC$，可得$B_1C \underline{\parallel} A_1D$，故$ME \underline{\parallel} ND$，

因此四边形$MNDE$为平行四边形，$MN\parallel ED$.

又$MN\not\subset$平面EDC_1，所以$MN\parallel$平面C_1DE.

（2）由已知可得$DE\perp DA$.

以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$D\text{-}xyz$，则



$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$M(1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,2)$，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$，$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$.

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面A_1MA的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0.\end{cases}$可取$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$.

设$\boldsymbol{n}=(p,q,r)$为平面A_1MN的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0.\end{cases}$

所以$\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\-p-2r=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$.

于是$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

19．解：设直线$l:y=\dfrac{3}{2}x+t,A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$.

（1）由题设得$F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，故$|AF|+|BF|=x_1+x_2+\dfrac{3}{2}$，由题设可得$x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$.

由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t\\y^2=3x\end{cases}$，可得$9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，则$x_1+x_2=-\dfrac{12(t-1)}{9}$.

从而$-\dfrac{12(t-1)}{9}=\dfrac{5}{2}$，得$t=-\dfrac{7}{8}$.

所以l的方程为$y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$.

（2）由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ 可得 $y_1=-3y_2$.

由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t\\y^2=3x\end{cases}$，可得$y^2-2y+2t=0$.

所以$y_1+y_2=2$. 从而$-3y_2+y_2=2$，故$y_2=-1,y_1=3$.

代入C的方程得$x_1=3,x_2=\dfrac{1}{3}$.

故$|AB|=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

20．解：（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)$ 单调递减，而 $g'(0)>0,g'(\dfrac{\pi}{2})<0$，可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点，

设为 α.

则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点，即 $f'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

（ii）当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$.故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)>0$.从而，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 没有零点.

（iii）当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.而 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$

在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$有唯一零点.

（iv）当$x\in(\pi,+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$，所以$f(x)$<0，从而$f(x)$在$(\pi,+\infty)$没有零点.

综上，$f(x)$有且仅有2个零点.

21．解：X的所有可能取值为$-1,0,1$.

$$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta,$$
$$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta),$$
$$P(X=1)=\alpha(1-\beta),$$

所以X的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（i）由（1）得$a=0.4,\quad b=0.5,\quad c=0.1$.

因此p_i=$0.4p_{i-1}$+$0.5\,p_i$+$0.1p_{i+1}$，故$0.1\left(p_{i+1}-p_i\right)=0.4\left(p_i-p_{i-1}\right)$，即

$$p_{i+1}-p_i=4\left(p_i-p_{i-1}\right).$$

又因为$p_1-p_0=p_1\neq0$，所以$\left\{p_{i+1}-p_i\right\}(i=0,1,2,\cdots,7)$为公比为4，首项为$p_1$的等比数列.

（ii）由（i）可得

$$p_8=p_8-p_7+p_7-p_6+\cdots+p_1-p_0+p_0=\left(p_8-p_7\right)+\left(p_7-p_6\right)+\cdots+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^8-1}{3}p_1.$$

由于p_8=1，故$p_1=\frac{3}{4^8-1}$，所以

$$p_4=\left(p_4-p_3\right)+\left(p_3-p_2\right)+\left(p_2-p_1\right)+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^4-1}{3}p_1=\frac{1}{257}.$$

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率，由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率为 $p_4=\frac{1}{257}\approx 0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

22．解：（1）因为 $-1<\frac{1-t^2}{1+t^2}\le 1$，且 $x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1$，所以 C 的直角坐标方程为

$x^2+\frac{y^2}{4}=1(x\ne -1)$.

l 的直角坐标方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$.

（2）由（1）可设 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）.

C 上的点到 l 的距离为 $\frac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\frac{4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+11}{\sqrt{7}}$.

当 $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$ 时，$4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+11$ 取得最小值7，故 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$.

23．解：（1）因为 $a^2+b^2\ge 2ab,b^2+c^2\ge 2bc,c^2+a^2\ge 2ac$，又 $abc=1$，故有

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$.

（2）因为 a, b, c 为正数且 $abc=1$，故有

$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}$

$=3(a+b)(b+c)(a+c)$

$\ge 3\times(2\sqrt{ab})\times(2\sqrt{bc})\times(2\sqrt{ac})$ =24.所以 $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设$z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则$|z|=$

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

2．已知集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,6,7\}$，则$B\cap \complement_U A=$

A．$\{1,6\}$　　B．$\{1,7\}$　　C．$\{6,7\}$　　D．$\{1,6,7\}$

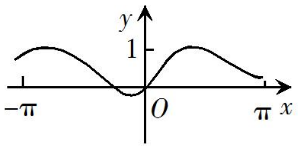
3．已知$a=\log_2 0.2, b=2^{0.2}, c=0.2^{0.3}$，则

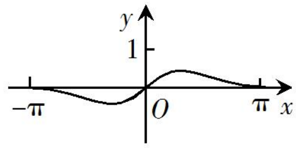
A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

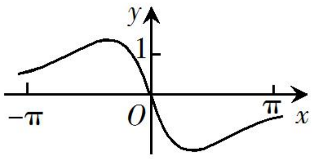
4．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$≈0.618，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为105cm，头顶至脖子下端的长度为26 cm，则其身高可能是

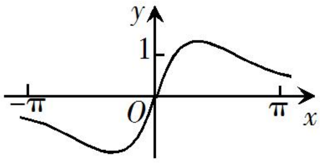
A．165 cm　　B．175 cm　　C．185 cm　　D．190 cm

5．函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在[—π，π]的图像大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

6．某学校为了解 1 000 名新生的身体素质，将这些学生编号为 1，2，…，1 000，从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验.若 46 号学生被抽到，则下面 4 名学生中被抽到的是

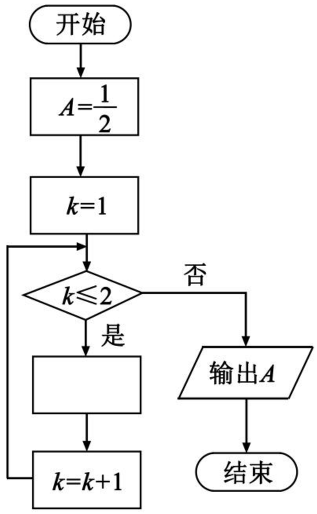
A．8 号学生　　B．200 号学生　　C．616 号学生　　D．815 号学生

7．tan255° =

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$-2+\sqrt{3}$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

8．已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且（$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$）⊥$\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$



9．如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入

A．$A=\dfrac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\dfrac{1}{A}$　　C．$A=\dfrac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\dfrac{1}{2A}$

10．双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130°，则 C 的离心率为

A．2sin40°　　B．2cos40°　　C．$\dfrac{1}{\sin 50°}$　　D．$\dfrac{1}{\cos 50°}$

11．△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，$\cos A=-\dfrac{1}{4}$，则 $\dfrac{b}{c}=$

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

12．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点.若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

14．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $a_1=1$，$S_3=\frac{3}{4}$，则 S_4=__________.

15．函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{2})-3\cos x$ 的最小值为__________.

16．已知 $\angle ACB=90°$，P 为平面 ABC 外一点，$PC=2$，点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC，BC 的距离均为 $\sqrt{3}$，那么 P 到平面 ABC 的距离为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17．（12 分）某商场为提高服务质量，随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客，每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价，得到下面列联表：

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

（1）分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率；

（2）能否有 95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

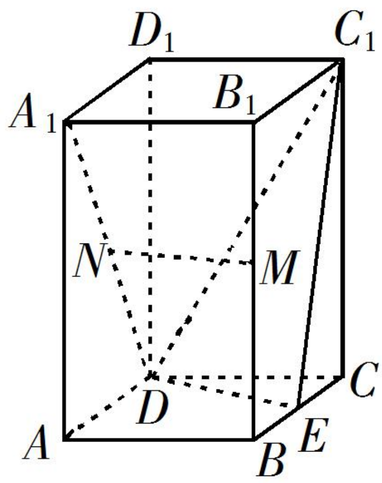
$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18．（12 分）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_9=-a_5$．

（1）若 $a_3=4$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $a_1>0$，求使得 $S_n\geq a_n$ 的 n 的取值范围．

19．（12 分）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．



（1）证明：$MN//$ 平面 C_1DE；

（2）求点 C 到平面 C_1DE 的距离．

20．（12 分）已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．

（1）证明：$f'(x)$ 在区间 $(0，\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0，\pi]$ 时，$f(x)\geq ax$，求 a 的取值范围．

21.（12 分）已知点 A，B 关于坐标原点 O 对称，$|AB|=4$，$\odot M$ 过点 A，B 且与直线 $x+2=0$ 相切．

（1）若 A 在直线 $x+y=0$ 上，求 $\odot M$ 的半径；

（2）是否存在定点 P，使得当 A 运动时，$|MA|-|MP|$ 为定值？并说明理由．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$．

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

23．[选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知 a，b，c 为正数，且满足 abc=1．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$．

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学·参考答案

一、选择题

1．C　　2．C　　3．B　　4．B　　5．D　　6．C

7．D　　8．B　　9．A　　10．D　　11．A　　12．B

二、填空题

13．$y=3x$　　14．$\dfrac{5}{8}$　　15．-4　　16．$\sqrt{2}$

三、解答题

17．解：

（1）由调查数据，男顾客中对该商场服务满意的比率为$\dfrac{40}{50}=0.8$，因此男顾客对该商场服务满意的概率的估计值为0.8．

女顾客中对该商场服务满意的比率为$\dfrac{30}{50}=0.6$，因此女顾客对该商场服务满意的概率的估计值为0.6．

（2）$K^2=\dfrac{100\times(40\times20-30\times10)^2}{50\times50\times70\times30}\approx4.762$．

由于$4.762>3.841$，故有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异．

18．解：

（1）设$\{a_n\}$的公差为d．

由$S_9=-a_5$得$a_1+4d=0$．

由$a_3=4$得$a_1+2d=4$．

于是$a_1=8,d=-2$．

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=10-2n$.

（2）由（1）得$a_1=-4d$，故$a_n=(n-5)d, S_n=\frac{n(n-9)d}{2}$.

由$a_1>0$知$d<0$，故$S_n \geqslant a_n$等价于$n^2-11n+10 \leqslant 0$，解得$1 \leq n \leq 10$.

所以n的取值范围是$\{n \mid 1 \leqslant n \leqslant 10, n \in \mathbf{N}\}$.

19．解：

（1）连结B_1C, ME.因为M，E分别为BB_1, BC的中点，所以$ME \parallel B_1C$，且$ME=\frac{1}{2}B_1C$.又因为N为A_1D的中点，所以$ND=\frac{1}{2}A_1D$.

由题设知$A_1B_1 \underline{\underline{\parallel}} DC$，可得$B_1C \underline{\underline{\parallel}} A_1D$，故$ME \underline{\underline{\parallel}} ND$，因此四边形$MNDE$为平行四边形，$MN \parallel ED$.又$MN \not\subset$平面$C_1DE$，所以$MN \parallel$平面$C_1DE$.

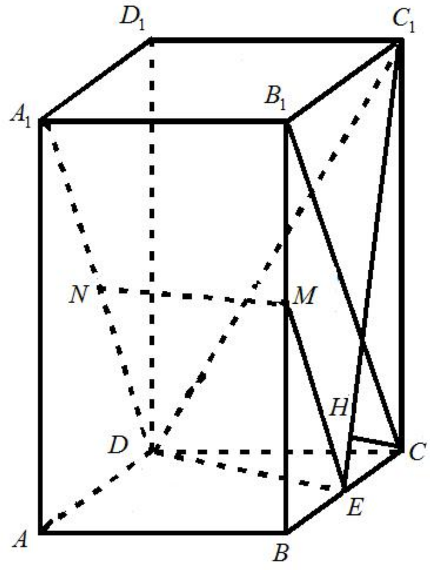
（2）过C作C_1E的垂线，垂足为H.

由已知可得$DE \perp BC$，$DE \perp C_1C$，所以$DE \perp$平面C_1CE，故$DE \perp CH$.

从而$CH \perp$平面C_1DE，故CH的长即为C到平面C_1DE的距离，

由已知可得$CE=1$，$C_1C=4$，所以$C_1E=\sqrt{17}$，故$CH=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

从而点C到平面C_1DE的距离为$\frac{4\sqrt{17}}{17}$.



20．解：

（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1, g'(x)=x\cos x$.

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.

又 $g(0)=0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0, g(\pi)=-2$，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点.

所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点.

（2）由题设知 $f(\pi)\geqslant a\pi, f(\pi)=0$，可得$a\leq 0$.

由(1)知，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点，设为 x_0，且当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(x_0,\pi\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 单调递增，在 $\left(x_0,\pi\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0, f(\pi)=0$，所以，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

又当 $a\leqslant 0, x\in[0,\pi]$ 时，$ax\leq 0$，故 $f(x)\geqslant ax$.

因此，a的取值范围是 $(-\infty,0]$.

21．解：（1）因为$\odot M$过点A, B，所以圆心M在AB的垂直平分线上.由已知A在直线$x+y=0$上，且A, B关于坐标原点O对称，所以M在直线$y=x$上，故可设$M(a, a)$.

因为$\odot M$与直线$x+2=0$相切，所以$\odot M$的半径为$r=|a+2|$.

由已知得$|AO|=2$，又$\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AO}$，故可得$2a^2+4=(a+2)^2$，解得$a=0$或$a=4$.

故$\odot M$的半径$r=2$或$r=6$.

（2）存在定点$P(1,0)$，使得$|MA|-|MP|$为定值.

理由如下：

设$M(x, y)$，由已知得$\odot M$的半径为$r=|x+2|, |AO|=2$.

由于$\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AO}$，故可得$x^2+y^2+4=(x+2)^2$，化简得$M$的轨迹方程为$y^2=4x$.

因为曲线$C: y^2=4x$是以点$P(1,0)$为焦点，以直线$x=-1$为准线的抛物线，所以$|MP|=x+1$.

因为$|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$，所以存在满足条件的定点$P$.

22．解：（1）因为$-1<\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\le 1$，且$x^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1$，所以$C$的直角坐标方程为$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x\ne -1)$.

l的直角坐标方程为$2x+\sqrt{3}y+11=0$.

（2）由（1）可设C的参数方程为$\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）.

C上的点到l的距离为$\dfrac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11}{\sqrt{7}}$.

当$\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}$时，$4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11$取得最小值7，故$C$上的点到$l$距离的最小值为$\sqrt{7}$.

23．解：（1）因为$a^2+b^2\ge 2ab,b^2+c^2\ge 2bc,c^2+a^2\ge 2ac$，又$abc=1$，故有

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$.

（2）因为a, b, c为正数且$abc=1$，故有

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}$$

$$=3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$\ge 3\times(2\sqrt{ab})\times(2\sqrt{bc})\times(2\sqrt{ac})$$

$$=24.$$

所以$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$.

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学（全国卷 2）

本试卷共 5 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x|x^2-5x+6>0\}$，$B=\{x|x-1<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty，1)$　　B．$(-2，1)$　　C．$(-3，-1)$　　D．$(3，+\infty)$

2．设 $z=-3+2i$，则在复平面内 $\overline{z}$ 对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3，t)$，$\overrightarrow{BC}=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

4．2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就，实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系．为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行．L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上．设地球质量为 M_1，月球质量为 M_2，地月距离为 R，L_2 点到月球的距离为 r，根据牛顿运动定律和万

有引力定律，r 满足方程：$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}$.

设 $\alpha=\frac{r}{R}$，由于 α 的值很小，因此在近似计算中 $\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，则 r 的近似值为

A．$\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$　　B．$\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$　　C．$\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$　　D．$\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

5．演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 7 个有效评分.7 个有效评分与 9 个原始评分相比，不变的数字特征是

A．中位数　　B．平均数　　C．方差　　D．极差

6．若 $a>b$，则

A．$\ln(a-b)>0$　　B．$3^a<3^b$　　C．$a^3-b^3>0$　　D．$|a|>|b|$

7．设α，β为两个平面，则$\alpha\parallel\beta$的充要条件是

A．α内有无数条直线与β平行　　B．α内有两条相交直线与β平行

C．α，β平行于同一条直线　　D．α，β垂直于同一平面

8．若抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

9．下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间$(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2})$单调递增的是

A．$f(x)=|\cos 2x|$　　B．$f(x)=|\sin 2x|$　　C．$f(x)=\cos|x|$　　D．$f(x)=\sin|x|$

10．已知$\alpha\in(0，\frac{\pi}{2})$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11．设 F 为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P，Q 两点.若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

12.设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$.若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geq -\dfrac{8}{9}$，则 m 的取值范围是

A. $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．我国高铁发展迅速，技术先进.经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为__________.

14．已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$.若 $f(\ln 2)=8$，则 $a=$__________.

15．$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $b=6,a=2c,B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为__________.

16．中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一.印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”（图 1）.半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体.半正多面体体现了数学的对称美.图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1.则该半正多面体共有________个面，其棱长为__________.（本题第一空 2 分，第二空 3 分.）

图 1

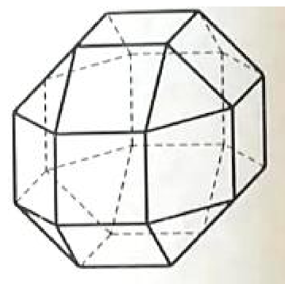


图 2

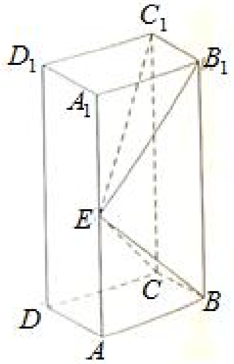
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）如图，长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$.

（1）证明：$BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，求二面角 $B\text{–}EC\text{–}C_1$ 的正弦值.



18．（12 分）11 分制乒乓球比赛，每赢一球得 1 分，当某局打成 10:10 平后，每球交换发球权，先多得 2 分的一方获胜，该局比赛结束.甲、乙两位同学进行单打比赛，假设甲发球时甲得分的概率为 0.5，乙发球时甲得分的概率为 0.4，各球的结果相互独立.在某局双方 10:10 平后，甲先发球，两人又打了 X 个球该局比赛结束.

（1）求 P（X=2）；

（2）求事件“X=4 且甲获胜”的概率.

19．（12 分）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足 $a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$ ，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

（1）证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

20．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论 $f(x)$的单调性，并证明 $f(x)$有且仅有两个零点；

（2）设 x_0 是 $f(x)$的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0，\ln x_0)$处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线.

21．（12 分）已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 $M(x,y)$满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$.记 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交 C 于 P，Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 于点 G.

（i）证明：$\triangle PQG$是直角三角形；

（ii）求$\triangle PQG$面积的最大值.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

在极坐标系中，O为极点，点$M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$在曲线$C:\rho=4\sin\theta$上，直线$l$过点$A(4,0)$且与$OM$垂直，垂足为$P$.

（1）当$\theta_0=\frac{\pi}{3}$时，求ρ_0及l的极坐标方程；

（2）当M在C上运动且P在线段OM上时，求P点轨迹的极坐标方程.

23．[选修4-5：不等式选讲]（10分）

已知$f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)<0$的解集；

（2）若$x\in(-\infty,1]$时，$f(x)<0$，求a的取值范围.

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学·参考答案

1．A　2．C　3．C　4．D　5．A　6．C

7．B　8．D　9．A　10．B　11．A　12．B

13．0.98　14．–3　15．$6\sqrt{3}$　16．26；$\sqrt{2}-1$

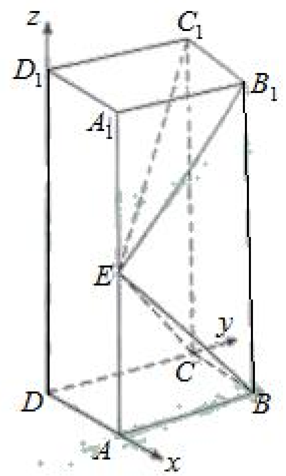
17．解：（1）由已知得，$B_1C_1\perp$平面ABB_1A_1，$BE\subset$平面ABB_1A_1，

故$B_1C_1\perp BE$．又$BE\perp EC_1$，所以$BE\perp$平面EB_1C_1．

（2）由（1）知$\angle BEB_1=90°$．由题设知$\text{Rt}\triangle ABE\cong\text{Rt}\triangle A_1B_1E$，所以$\angle AEB=45°$，

故$AE=AB$，$AA_1=2AB$．

以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，$|\overrightarrow{DA}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系D-xyz，



则C（0，1，0），B（1，1，0），C_1（0，1，2），E（1，0，1），$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$．

设平面EBC的法向量为$\boldsymbol{n}$=（x，y，x），则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=0,\\ x-y+z=0,\end{cases}$$

所以可取$\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$．

设平面ECC_1的法向量为$\boldsymbol{m}$=（x，y，z），则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2z=0,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

所以可取$\boldsymbol{m}$=（1，1，0）．

于是 $\cos < \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} >= \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|} = -\dfrac{1}{2}$.

所以，二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18．解：（1）X=2就是10：10平后，两人又打了2个球该局比赛结束，则这2个球均由甲得分，或者均由乙得分．因此P（X=2）=0.5×0.4+（1–0.5）×（1–04）=05．

（2）X=4且甲获胜，就是10：10平后，两人又打了4个球该局比赛结束，且这4个球的得分情况为：前两球是甲、乙各得1分，后两球均为甲得分．

因此所求概率为

[0.5×（1–0.4）+（1–0.5）×0.4]×0.5×0.4=0.1．

19．解：（1）由题设得 $4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即 $a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$.

又因为a_1+b_1=l，所以 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为1，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列．

由题设得 $4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，

即 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$.

又因为a_1-b_1=l，所以 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列．

（2）由（1）知，$a_n+b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$.

所以 $a_n=\dfrac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\dfrac{1}{2^n}+n-\dfrac{1}{2}$，

$b_n=\dfrac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\dfrac{1}{2^n}-n+\dfrac{1}{2}$.

20．解：（1）f（x）的定义域为（0，1），（1，+∞）单调递增．

因为f（e）$=1-\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=2-\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，

所以f（x）在（1，$+\infty$）有唯一零点x_1，即f（x_1）=0.

又$0<\dfrac{1}{x_1}<1$，$f(\dfrac{1}{x_1})=-\ln x_1+\dfrac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，

故f（x）在（0，1）有唯一零点$\dfrac{1}{x_1}$.

综上，f（x）有且仅有两个零点.

（2）因为$\dfrac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{-\ln x_0}$，故点$B$（$-\ln x_0$，$\dfrac{1}{x_0}$）在曲线$y=\mathrm{e}^x$上.

由题设知$f(x_0)=0$，即$\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，

故直线AB的斜率$k=\dfrac{\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\dfrac{\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}}{-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

曲线$y=\mathrm{e}^x$在点$B(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0})$处切线的斜率是$\dfrac{1}{x_0}$，曲线$y=\ln x$在点$A(x_0,\ln x_0)$处切线的斜率也是$\dfrac{1}{x_0}$，

所以曲线$y=\ln x$在点$A(x_0,\ln x_0)$处的切线也是曲线$y=\mathrm{e}^x$的切线.

21．解：（1）由题设得$\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$，化简得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1(|x|\neq 2)$，所以$C$为中心在坐标原点，焦点在$x$轴上的椭圆，不含左右顶点.

（2）（i）设直线PQ的斜率为k，则其方程为$y=kx(k>0)$.

由$\begin{cases}y=kx\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$得$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$.

记$u=\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，则$P(u,uk),Q(-u,-uk),E(u,0)$.

于是直线QG的斜率为$\dfrac{k}{2}$，方程为$y=\dfrac{k}{2}(x-u)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{k}{2}(x-u), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$得$(2+k^2)x^2-2uk^2x+k^2u^2-8=0$. ①

设$G(x_G,y_G)$，则$-u$和x_G是方程①的解，故$x_G=\dfrac{u(3k^2+2)}{2+k^2}$，由此得$y_G=\dfrac{uk^3}{2+k^2}$.

从而直线PG的斜率为$\dfrac{\dfrac{uk^3}{2+k^2}-uk}{\dfrac{u(3k^2+2)}{2+k^2}-u}=-\dfrac{1}{k}$.

所以$PQ\perp PG$，即$\triangle PQG$是直角三角形.

（ii）由（i）得$|PQ|=2u\sqrt{1+k^2}$，$|PG|=\dfrac{2uk\sqrt{k^2+1}}{2+k^2}$，

所以$\triangle PQG$的面积$S=\dfrac{1}{2}|PQ||PG|=\dfrac{8k(1+k^2)}{(1+2k^2)(2+k^2)}=\dfrac{8(\dfrac{1}{k}+k)}{1+2(\dfrac{1}{k}+k)^2}$.

设$t=k+\dfrac{1}{k}$，则由$k>0$得$t\geqslant 2$，当且仅当$k=1$时取等号.

因为$S=\dfrac{8t}{1+2t^2}$在[2，+∞）单调递减，所以当$t=2$，即$k=1$时，S取得最大值，最大值为$\dfrac{16}{9}$.

因此，$\triangle PQG$面积的最大值为$\dfrac{16}{9}$.

22．解：（1）因为$M(\rho_0,\theta_0)$在C上，当$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$时，$\rho_0=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

由已知得$|OP|=|OA|\cos\frac{\pi}{3}=2$.

设$Q(\rho,\theta)$为l上除P的任意一点.在$\mathrm{Rt}\triangle OPQ$中$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=|OP|=2$，

经检验，点$P(2,\frac{\pi}{3})$在曲线$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$上.

所以，l的极坐标方程为$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，在$\mathrm{Rt}\triangle OAP$中，$|OP|=|OA|\cos\theta=4\cos\theta,$ 即 $\rho=4\cos\theta$..

因为P在线段OM上，且$AP\perp OM$，故θ的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta,\quad\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

23．解:（1）当a=1时，$f(x)$=$|x-1|\,x$+$|x-2|(x-1)$.

当$x<1$时，$f(x)=-2(x-1)^2<0$；当$x\geq1$时，$f(x)\geq0$.

所以，不等式$f(x)<0$的解集为$(-\infty,1)$.

（2）因为$f(a)$=0，所以$a\geq1$.

当$a\geq1$，$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)$=$(a-x)\,x$+$(2-x)(x-a)$=$2(a-x)(x-1)$<0

所以，a的取值范围是$[1,+\infty)$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学（全国卷2）

本试卷共5页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid x>-1\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-1，+\infty)$　　B．$(-\infty，2)$　　C．$(-1，2)$　　D．$\varnothing$

2．设 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$，则 $\overline{z}=$

A．$1+2\mathrm{i}$　　B．$-1+2\mathrm{i}$　　C．$1-2\mathrm{i}$　　D．$-1-2\mathrm{i}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2，3)$，$\boldsymbol{b}=(3，2)$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$5\sqrt{2}$　　D．50

4．生物实验室有5只兔子，其中只有3只测量过某项指标，若从这5只兔子中随机取出3只，则恰有2只测量过该指标的概率为

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{1}{5}$

5．在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测．

甲：我的成绩比乙高．

乙：丙的成绩比我和甲的都高．

丙：我的成绩比乙高．

成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A．甲、乙、丙　　B．乙、甲、丙

C．丙、乙、甲　　D．甲、丙、乙

6．设 $f(x)$为奇函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$

A．$e^{-x}-1$　　B．$e^{-x}+1$　　C．$-e^{-x}-1$　　D．$-e^{-x}+1$

7．设α，β为两个平面，则$\alpha\parallel\beta$的充要条件是

A．α内有无数条直线与β平行　　B．α内有两条相交直线与β平行

C．α，β平行于同一条直线　　D．α，β垂直于同一平面

8．若 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x$ ($\omega>0$)两个相邻的极值点，则 $\omega=$

A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

9．若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

10．曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点$(\pi，-1)$处的切线方程为

A．$x-y-\pi-1=0$　　B．$2x-y-2\pi-1=0$　　C．$2x+y-2\pi+1=0$　　D．$x+y-\pi+1=0$

11．已知 $a\in$（0，$\frac{\pi}{2}$），$2\sin2\alpha=\cos2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12．设 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点，$O$ 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P、Q 两点．若$|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-6\geq 0,\\ x+y-3\leq 0,\\ y-2\leq 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最大值是___________.

14．我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为___________.

15．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.已知 $b\sin A+a\cos B=0$，则 $B=$___________.

16．中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是"半正多面体"（图 1）.半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体.半正多面体体现了数学的对称美．图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1．则该半正多面体共有________个面，其棱长为_________．（本题第一空 2 分，第二空 3 分．）

图 1

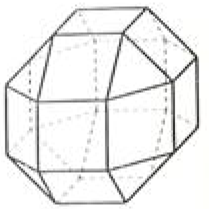


图 2

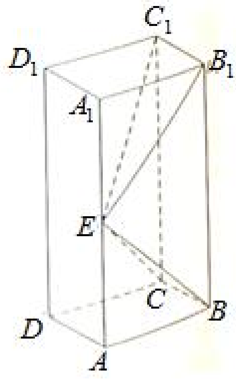
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分。

17. （12 分）如图，长方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$.

（1）证明：$BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.



18. （12 分）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1=2,a_3=2a_2+16$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. （12 分）某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况，随机调查了 100 个企业，得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20,0)$	$[0,0.20)$	$[0.20,0.40)$	$[0.40,0.60)$	$[0.60,0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

（1）分别估计这类企业中产值增长率不低于 40%的企业比例、产值负增长的企业比例；

（2）求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）.（精确到 0.01）

附：$\sqrt{74}\approx 8.602$.

20. （12 分）已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为 C 上一点，O 为坐标原点.

（1）若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形，求 C 的离心率；

(2)如果存在点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16，求 b 的值和 a 的取值范围.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$。证明：

（1）$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2） $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在极坐标系中，O 为极点，点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P.

（1）当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求 ρ_0 及 l 的极坐标方程；

（2）当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时，求 P 点轨迹的极坐标方程.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<0$ 的解集；

（2）若 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围.

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学（全国卷2）参考答案

1．C　　2．D　　3．A　　4．B　　5．A　　6．D

7．B　　8．A　　9．D　　10．C　　11．B　　12．A

13．9　　14．0.98　　15．$\dfrac{3\pi}{4}$　　16．$\sqrt{2}-1$

17．解：（1）由已知得$B_1C_1\perp$平面ABB_1A_1，$BE\subset$平面ABB_1A_1，

故$B_1C_1\perp BE$．

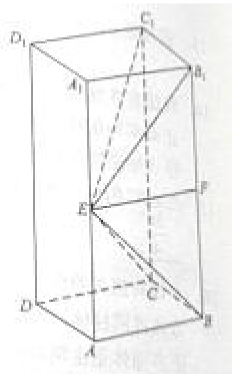
又$BE\perp EC_1$，所以$BE\perp$平面EB_1C_1．

（2）由（1）知$\angle BEB_1=90°$.由题设知Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle A_1B_1E$，所以$\angle AEB=\angle A_1EB_1=45^{\circ}$，故$AE=AB=3$，

$AA_1=2AE=6$．

作$EF\perp BB_1$，垂足为F，则$EF\perp$平面BB_1C_1C，且$EF=AB=3$．

所以，四棱锥$E-BB_1C_1C$的体积$V=\dfrac{1}{3}\times3\times6\times3=18$．



18．解：（1）设$\{a_n\}$的公比为q，由题设得

$2q^2=4q+16$，即$q^2-2q-8=0$．

解得$q=-2$（舍去）或q=4.

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times4^{n-1}=2^{2n-1}$.

（2）由（1）得$b_n=(2n-1)\log_2 2=2n-1$，因此数列$\{b_n\}$的前n项和为$1+3+\cdots+2n-1=n$.

19.解：（1）根据产值增长率频数分布表得，所调查的100个企业中产值增长率不低于40%的企业频率为$\frac{14+7}{100}=0.21$.

产值负增长的企业频率为$\frac{2}{100}=0.02$.

用样本频率分布估计总体分布得这类企业中产值增长率不低于40%的企业比例为21%，产值负增长的企业比例为2%.

（2）$\overline{y}=\frac{1}{100}(-0.10\times2+0.10\times24+0.30\times53+0.50\times14+0.70\times7)=0.30$，

$$s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5}n_i\left(y_i-\overline{y}\right)^2$$

$$=\frac{1}{100}\left[(-0.40)^2\times2+(-0.20)^2\times24+0^2\times53+0.20^2\times14+0.40^2\times7\right]$$

=0.0296，

$s=\sqrt{0.0296}=0.02\times\sqrt{74}\approx0.17$，

所以，这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值分别为30%，17%.

20.解：(1)连结PF_1，由$\triangle POF_2$为等边三角形可知在$\triangle F_1PF_2$中，$\angle F_1PF_2=90°$，$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$，于是$2a=|PF_1|+|PF_2|=(\sqrt{3}+1)c$，故$C$的离心率是$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.

（2）由题意可知，满足条件的点$P(x,y)$存在当且仅当$\frac{1}{2}|y|\cdot2c=16$，$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

即$c|y|=16$，①

$x^2+y^2=c^2$，②

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，③

由②③及 $a^2=b^2+c^2$ 得 $y^2=\frac{b^4}{c^2}$，又由①知 $y^2=\frac{16^2}{c^2}$，故 $b=4$.

由②③得 $x^2=\frac{a^2}{c^2}\left(c^2-b^2\right)$，所以 $c^2\geq b^2$，从而 $a^2=b^2+c^2\geq 2b^2=32,$ 故 $a\geq 4\sqrt{2}$.

当 $b=4$，$a\geq 4\sqrt{2}$ 时，存在满足条件的点P.

所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

21.解：（1）$f(x)$ 的定义域为（0，+∞）.

$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$.

因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=\frac{1}{x}$ 单调递减，所以 $f'(x)$ 单调递增，又 $f'(1)=-1<0$，

$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'\left(x_0\right)=0$.

又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因此，$f(x)$ 存在唯一的极值点.

（2）由（1）知 $f\left(x_0\right)<f(1)=-2$，又 $f\left(\mathrm{e}^2\right)=\mathrm{e}^2-3>0$，所以 $f(x)=0$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内存在唯一根 $x=\alpha$.

由 $\alpha>x_0>1$ 得 $\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.

又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，故 $\frac{1}{\alpha}$ 是 $f(x)=0$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 的唯一根.

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

22．解：（1）因为 $M\left(\rho_0,\theta_0\right)$ 在C上，当 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ 时，$\rho_0=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

由已知得$|OP|=|OA|\cos\frac{\pi}{3}=2$.

设$Q(\rho,\theta)$为l上除P的任意一点.在$\mathrm{Rt}\triangle OPQ$中$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=|OP|=2$，

经检验，点$P(2,\frac{\pi}{3})$在曲线$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$上.

所以，l的极坐标方程为$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，在$\mathrm{Rt}\triangle OAP$中，$|OP|=|OA|\cos\theta=4\cos\theta,$ 即 $\rho=4\cos\theta$..

因为P在线段OM上，且$AP\perp OM$，故θ的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta,\quad \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

23．解：（1）当a=1时，$f(x)=|x-1|\,x+|x-2|(x-1)$.

当$x<1$时，$f(x)=-2(x-1)^2<0$；当$x\geq 1$时，$f(x)\geq 0$.

所以，不等式$f(x)<0$的解集为$(-\infty,1)$.

（2）因为$f(a)=0$，所以$a\geq 1$.

当$a\geq 1$，$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)=(a-x)\,x+(2-x)(x-a)=2(a-x)(x-1)<0$.

所以，a的取值范围是$[1,+\infty)$.

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学（全国卷 3）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,x^2\le 1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 z=

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著.某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为

A．0.5　　B．0.6　　C．0.7　　D．0.8

4．（$1+2x^2$）（$1+x$）^{4} 的展开式中 x^3 的系数为

A．12　　B．16　　C．20　　D．24

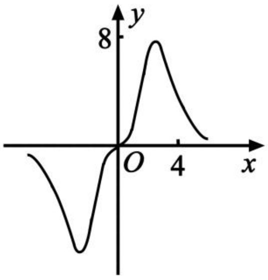
5．已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为和为 15，且 $a_5=3a_3+4a_1$，则 a_3=

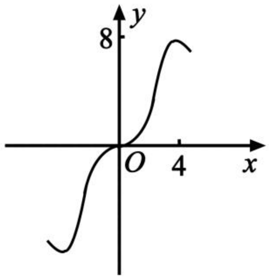
A． 16　　B． 8　　C．4　　D． 2

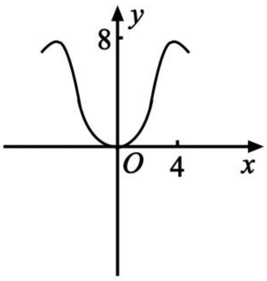
6．已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点（1，ae）处的切线方程为 y=2x+b，则

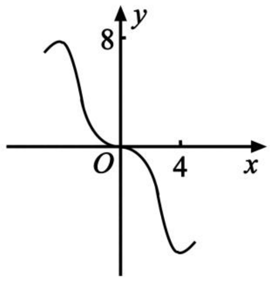
A．$a=\mathrm{e}$，$b=-1$　　B．a=e，b=1　　C．$a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=1$　　D．$a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=-1$

7．函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图象大致为

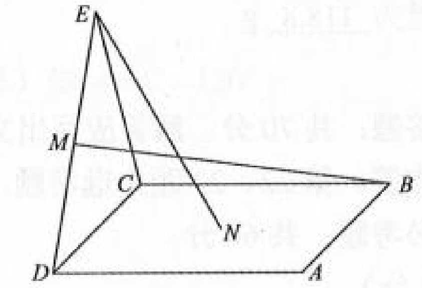
A．

B．

C．

D．

8．如图，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，△ECD 为正三角形，平面 ECD⊥平面 $ABCD$，M 是线段 ED 的中点，则



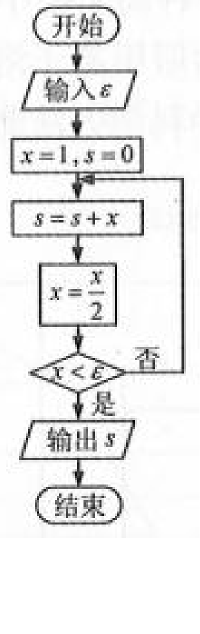
A．BM=EN，且直线 BM、EN 是相交直线

B．BM≠EN，且直线 BM，EN 是相交直线

C．BM=EN，且直线 BM、EN 是异面直线

D．BM≠EN，且直线 BM，EN 是异面直线

9．执行下边的程序框图，如果输入的 ε 为 0.01，则输出 s 的值等于



A. $2-\dfrac{1}{2^4}$　　B. $2-\dfrac{1}{2^5}$　　C. $2-\dfrac{1}{2^6}$　　D. $2-\dfrac{1}{2^7}$

10．双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的一条渐进线上，O 为坐标原点，若 $|PO|=|PF|$，则△PFO 的面积为

A．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

11．设 $f\left(x\right)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $\left(0,\infty\right)$ 单调递减，则

A．f（$\log_3\frac{1}{4}$）＞f（$2^{-\frac{3}{2}}$）＞f（$2^{-\frac{2}{3}}$）　　B．f（$\log_3\frac{1}{4}$）＞f（$2^{-\frac{2}{3}}$）＞f（$2^{-\frac{3}{2}}$）

C．f（$2^{-\frac{3}{2}}$）＞f（$2^{-\frac{2}{3}}$）＞f（$\log_3\frac{1}{4}$）　　D．f（$2^{-\frac{2}{3}}$）＞f（$2^{-\frac{3}{2}}$）＞f（$\log_3\frac{1}{4}$）

12．设函数 $f\left(x\right)=\sin$（$\omega x+\frac{\pi}{5}$）($\omega>0$)，已知 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 有且仅有 5 个零点，下述四个结论：

①$f\left(x\right)$ 在（$0,2\pi$）有且仅有 3 个极大值点

②$f\left(x\right)$ 在（$0,2\pi$）有且仅有 2 个极小值点

③$f\left(x\right)$ 在（$0,\frac{\pi}{10}$）单调递增

④ω 的取值范围是[$\frac{12}{5},\frac{29}{10}$)

其中所有正确结论的编号是

A．①④　　B．②③　　C．①②③　　D．①③④

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

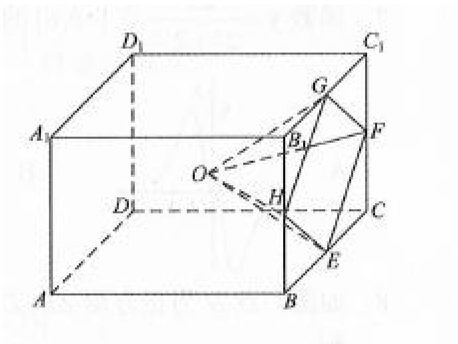
13．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$，则 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=$__________.

14．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1\neq0$，$a_2=3a_1$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=$__________.

15．设 F_1，F_2 为椭圆 C:$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限.若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M

的坐标为__________.

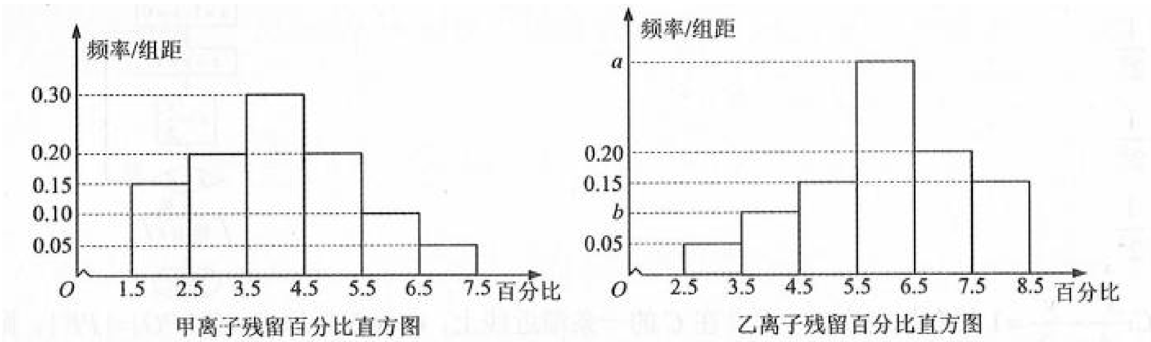
16．学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型.如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 O—$EFGH$ 后所得几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\text{cm}, AA_1=4\text{cm}$，3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm³，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为__________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A、B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液，每组小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同．经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比.根据试验数据分别得到如下直方图：



记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”，根据直方图得到 P（C）的估计值为 0.70.

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a，b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）.

18．（12 分）△*ABC* 的内角 *A*、*B*、*C* 的对边分别为 *a*、*b*、*c*，已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.

（1）求 *B*;

（2）若△*ABC* 为锐角三角形，且 *c*=1，求△*ABC* 面积的取值范围.

19.（12 分)图 1 是由矩形 *ADEB*、Rt△*ABC* 和菱形 *BFGC* 组成的一个平面图形，其中 *AB*=1，*BE*=*BF*=2，∠*FBC*=60°，将其沿 *AB*，*BC* 折起使得 *BE* 与 *BF* 重合，连结 *DG*，如图 2.

（1）证明：图 2 中的 *A*，*C*，*G*，*D* 四点共面，且平面 *ABC*⊥平面 *BCGE*;

（2）求图 2 中的二面角 *B*-*CG*-*A* 的大小.

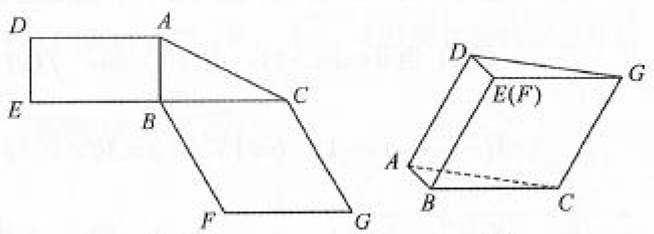


图 1　　图 2

20．（12 分）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由.

21．已知曲线 *C*：$y=\dfrac{x^2}{2}$，*D* 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 *D* 作 *C* 的两条切线，切点分别为 *A*，*B*.

（1）证明：直线 *AB* 过定点:

（2）若以 $E(0,\dfrac{5}{2})$为圆心的圆与直线 *AB* 相切，且切点为线段 *AB* 的中点，求四边形 *ADBE* 的面积.

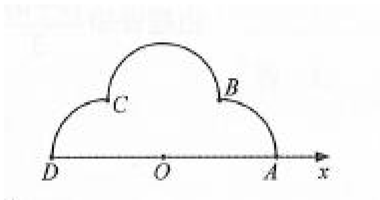
（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2,0)$，$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，$C(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$，$D(2,\pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$，$(1,\frac{\pi}{2})$，$(1,\pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$，曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$，曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.

（1）分别写出 M_1，M_2，M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1，M_2，M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP|=\sqrt{3}$，求 P 的极坐标.



23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，且 $x+y+z=1$.

（1）求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geq\frac{1}{3}$ 成立，证明：$a\leq-3$ 或 $a\geq-1$.

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学（全国卷3）·参考答案

一、选择题

1．A　2．D　3．C　4．A　5．C　6．D　7．B　8．B　9．C　10．A　11．C　12．D

二、填空题

13．$\frac{2}{3}$　　14．4　　15．$(3,\sqrt{15})$　　16．118.8

三、解答题

17．解：（1）由已知得0.70=a+0.20+0.15，故a=0.35．

b=1–0.05–0.15–0.70=0.10．

（2）甲离子残留百分比的平均值的估计值为

2×0.15+3×0.20+4×0.30+5×0.20+6×0.10+7×0.05=4.05．

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

3×0.05+4×0.10+5×0.15+6×0.35+7×0.20+8×0.15=6.00．

18．解：（1）由题设及正弦定理得$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$．

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$．

由$A+B+C=180^{\circ}$，可得$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，故$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$．

因为$\cos\frac{B}{2}\neq 0$，故$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，因此$B$=60°．

（2）由题设及（1）知△ABC的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$．

由正弦定理得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(120^{\circ}-C\right)}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$.

由于△ABC为锐角三角形，故0°<A<90°，0°<C<90°，由（1）知A+C=120°，所以30°<C<90°，故 $\dfrac{1}{2}<a<2$ ，

从而 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，△ABC面积的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

19．解：（1）由已知得$AD\parallel BE$，$CG\parallel BE$，所以$AD\parallel CG$，故AD，CG确定一个平面，从而A，C，G，D四点共面.

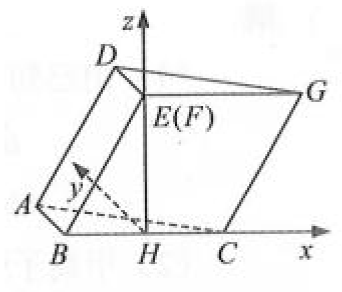
由已知得$AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故$AB\perp$平面$BCGE$.

又因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面$BCGE$.

（2）作$EH\perp BC$，垂足为H．因为$EH\subset$平面$BCGE$，平面$BCGE\perp$平面ABC，所以$EH\perp$平面ABC.

由已知，菱形$BCGE$的边长为2，∠EBC=60°，可求得BH=1，EH=$\sqrt{3}$.

以H为坐标原点，$\overrightarrow{HC}$ 的方向为x轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系H–xyz，



则A（–1，1，0），C（1，0，0），G（2，0，$\sqrt{3}$ ），$\overrightarrow{CG}$=（1，0，$\sqrt{3}$ ），$\overrightarrow{AC}$=（2，–1，0）.

设平面$ACGD$的法向量为$\boldsymbol{n}$=（x，y，z），则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$$

所以可取$\boldsymbol{n}$=（3，6，$-\sqrt{3}$）.

又平面$BCGE$的法向量可取为$\boldsymbol{m}$=（0，1，0），所以$\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此二面角B–CG–A的大小为30°.

20. 解：（1）$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令$f'(x)=0$，得x=0或$x=\dfrac{a}{3}$.

若 a>0，则当$x\in(-\infty,0)\bigcup\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在$(-\infty,0),\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$单调递增，在$\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$单调递减；

若a=0，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增；

若 a<0，则当$x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)\bigcup(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\dfrac{a}{3},0\right)$时，$f'(x)<0$．故$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right),(0,+\infty)$单调递增，在$\left(\dfrac{a}{3},0\right)$单调递减.

（2）满足题设条件的a，b存在.

（i）当a≤0时，由（1）知，$f(x)$在[0，1]单调递增，所以$f(x)$在区间[0，l]的最小值为$f(0)=b$，最大值为$f(1)=2-a+b$.此时a，b满足题设条件当且仅当$b=-1$，$2-a+b=1$，即a=0，$b=-1$.

（ii）当a≥3时，由（1）知，$f(x)$在[0，1]单调递减，所以$f(x)$在区间[0，1]的最大值为$f(0)=b$，最小值为$f(1)=2-a+b$．此时a，b满足题设条件当且仅当$2-a+b=-1$，b=1，即a=4，b=1.

（iii）当0<a<3时，由（1）知，$f(x)$在[0，1]的最小值为$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^3}{27}+b$，最大值为$b$或$2-a+b$.

若$-\frac{a^3}{27}+b=-1$，b=1，则$a=3\sqrt[3]{2}$，与 0<a<3 矛盾.

若$-\frac{a^3}{27}+b=-1$，$2-a+b=1$，则$a=3\sqrt{3}$或$a=-3\sqrt{3}$或 a=0，与 0<a<3 矛盾.

综上，当且仅当 a=0，$b=-1$或 a=4，b=1 时，$f(x)$在[0，1]的最小值为－1，最大值为 1.

21．解：（1）设$D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，则$x_1^2=2y_1$.

由于$y'=x$，所以切线DA的斜率为x_1，故$\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$.

整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B\left(x_2,y_2\right)$，同理可得$2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线AB的方程为$2tx-2y+1=0$.

所以直线AB过定点$(0,\frac{1}{2})$.

（2）由（1）得直线AB的方程为$y=tx+\frac{1}{2}$.

由$\begin{cases}y=tx+\frac{1}{2}\\y=\frac{x^2}{2}\end{cases}$，可得$x^2-2tx-1=0$.

于是$x_1+x_2=2t,\quad x_1x_2=-1,\quad y_1+y_2=t\left(x_1+x_2\right)+1=2t^2+1$，

$|AB|=\sqrt{1+t^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+t^2}\times\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=2\left(t^2+1\right)$.

设d_1,d_2分别为点D，E到直线AB的距离，则$d_1=\sqrt{t^2+1},\quad d_2=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}$.

因此，四边形$ADBE$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\left(d_1+d_2\right)=\left(t^2+3\right)\sqrt{t^2+1}$.

设M为线段AB的中点，则$M\left(t,t^2+\frac{1}{2}\right)$.

由于$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{EM}=\left(t,t^2-2\right)$，$\overrightarrow{AB}$与向量$(1,t)$平行，所以$t+\left(t^2-2\right)t=0$.解得$t$=0或$t=\pm1$.

当t=0时，S=3；当$t=\pm1$时，$S=4\sqrt{2}$.

因此，四边形$ADBE$的面积为3或$4\sqrt{2}$.

22.解：（1）由题设可得，弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD}$所在圆的极坐标方程分别为$\rho=2\cos\theta$，$\rho=2\sin\theta$，$\rho=-2\cos\theta$.

所以M_1的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$，$M_2$的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\right)$，$M_3$的极坐标方程为$\rho=-2\cos\theta\left(\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi\right)$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，由题设及（1）知

若$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，则$2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{6}$；

若$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$，则$2\sin\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{2\pi}{3}$；

若$\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$，则$-2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

综上，P的极坐标为$\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$或$\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

23．解：（1）由于$[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\le3\left[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right]$，

故由已知得 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geq\frac{4}{3}$，

当且仅当$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$， $z=-\frac{1}{3}$时等号成立.

所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为$\frac{4}{3}$.

（2）由于

$[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2$

$=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leq 3\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\right]$,

故由已知 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geq\frac{(2+a)^2}{3}$，

当且仅当 $x=\frac{4-a}{3}$， $y=\frac{1-a}{3}$， $z=\frac{2a-2}{3}$ 时等号成立.

因此 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$ 的最小值为$\frac{(2+a)^2}{3}$.

由题设知$\frac{(2+a)^2}{3}\geq\frac{1}{3}$，解得 $a\leq -3$ 或 $a\geq -1$.

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学（全国卷 3）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,x^2\le 1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 z=

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．两位男同学和两位女同学随机排成一列，则两位女同学相邻的概率是

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

4．《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著.某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为

A．0.5　　B．0.6　　C．0.7　　D．0.8

5．函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在[0，2π]的零点个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

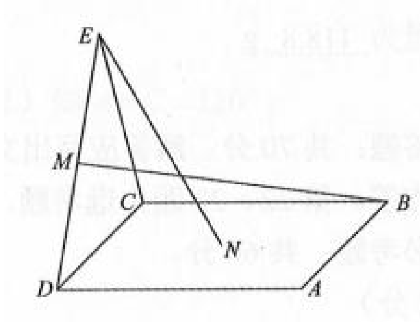
6．已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 4 项和为 15，且 $a_5=3a_3+4a_1$，则 $a_3=$

A． 16　　B． 8　　C．4　　D． 2

7．已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点（1，ae）处的切线方程为 $y=2x+b$，则

A．a=e，b=-1　　B．a=e，b=1　　C．a=e^{-1}，b=1　　D．a=e^{-1}，$b=-1$

8．如图，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，△ECD 为正三角形，平面 ECD⊥平面 $ABCD$，M 是线段 ED 的中点，则



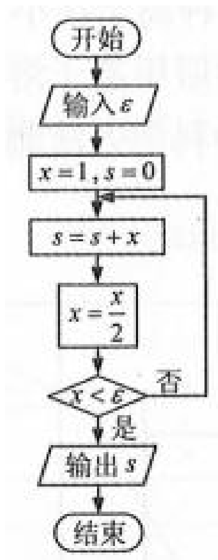
A．$BM=EN$，且直线 BM、EN 是相交直线

B．$BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是相交直线

C．$BM=EN$，且直线 BM、EN 是异面直线

D．$BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是异面直线

9．执行下边的程序框图，如果输入的ε为0.01，则输出s的值等于



A. $2-\dfrac{1}{2^4}$　　B. $2-\dfrac{1}{2^5}$　　C. $2-\dfrac{1}{2^6}$　　D. $2-\dfrac{1}{2^7}$

10. 已知 F 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的一个焦点，点 P 在 C 上，O 为坐标原点，若$|OP|=|OF|$，

则△OPF 的面积为

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{5}{2}$　　C. $\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}$

11. 记不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 6,\\2x-y\geq 0\end{cases}$表示的平面区域为$D$.命题 $p:\exists(x,y)\in D,2x+y\geqslant 9$；命题 $q:\forall(x,y)\in D,2x+y\leqslant 12$.

下面给出了四个命题

① $p\vee q$　　②$\neg p\vee q$　　③ $p\wedge\neg q$　　④$\neg p\wedge\neg q$

这四个命题中，所有真命题的编号是

A．①③　　B．①②　　C．②③　　D．③④

12．设 $f\left(x\right)$是定义域为 **R** 的偶函数，且在$\left(0,+\infty\right)$单调递减，则

A．f（$\log_3\frac{1}{4}$）＞f（$2^{-\frac{3}{2}}$）＞f（$2^{-\frac{2}{3}}$）　　B．f（$\log_3\frac{1}{4}$）＞f（$2^{-\frac{2}{3}}$）＞f（$2^{-\frac{3}{2}}$）

C．f（$2^{-\frac{3}{2}}$）＞f（$2^{-\frac{2}{3}}$）＞f（$\log_3\frac{1}{4}$）　　D．f（$2^{-\frac{2}{3}}$）＞f（$2^{-\frac{3}{2}}$）＞f（$\log_3\frac{1}{4}$）

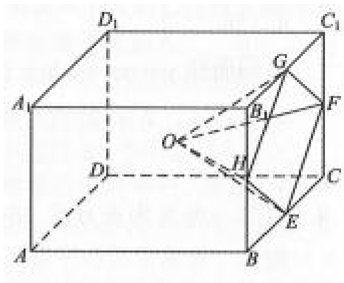
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2),\boldsymbol{b}=(-8,6)$，则 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$__________.

14．记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_3=5,a_7=13$，则 $S_{10}=$__________.

15．设 F_1，F_2 为椭圆 C:$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限.若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为__________.

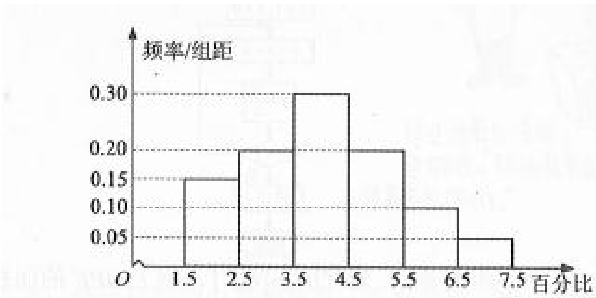
16．学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型.如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\text{cm}, AA_1=4\text{cm}$，3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm³，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为__________g.



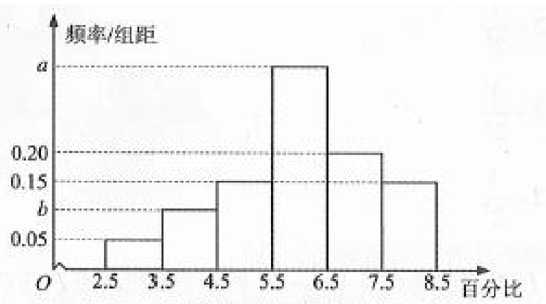
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A，B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液.每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同。经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比.根据试验数据分别得到如下直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记C为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于5.5”，根据直方图得到P（C）的估计值为0.70.

（1）求乙离子残留百分比直方图中a，b的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）.

18．（12 分）$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.

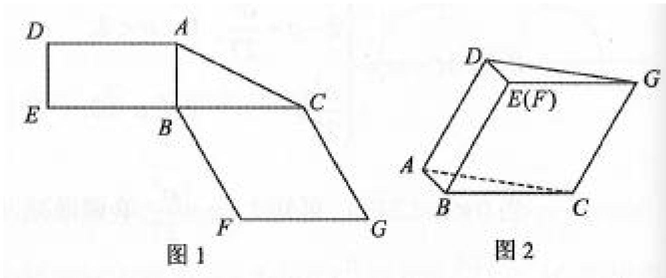
（1）求 B;

（2）若$\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 c=1，求$\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19．（12 分）图 1 是由矩形 $ADEB$、Rt$\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 AB=1，BE=BF=2，$\angle FBC$=60°.将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图 2.

（1）证明图 2 中的 A，C，G，D 四点共面，且平面 $ABC\perp$平面 $BCGE$;

（2）求图 2 中的四边形 $ACGD$ 的面积.



20.（12 分）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）当0<a<3时，记 $f(x)$ 在区间[0，1]的最大值为M，最小值为m，求 $M-m$ 的取值范围.

21．（12 分）已知曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A，B.

（1）证明：直线 AB 过定点：

（2）若以 $E(0，\dfrac{5}{2})$为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求该圆的方程.

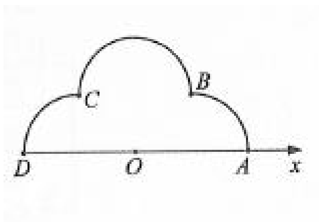
（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2,0)$，$B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$，$C(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4})$，$D(2,\pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$，$(1,\dfrac{\pi}{2})$，$(1,\pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$，曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$，曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.

（1）分别写出 M_1，M_2，M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1，M_2，M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP|=\sqrt{3}$，求 P 的极坐标.



23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，且 $x+y+z=1$.

（1）求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geq\dfrac{1}{3}$ 成立，证明：$a\leq-3$ 或 $a\geq-1$.

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学（全国卷3）·参考答案

一、选择题

1．A　2．D　3．D　4．C　5．B　6．C　7．D　8．B　9．C　10．B　11．A　12．C

二、填空题

13．$-\frac{\sqrt{2}}{10}$　14．100　15．$(3,\sqrt{15})$　16．118.8

三、解答题

17．解：（1）由已知得0.70=a+0.20+0.15，故a=0.35．

b=1–0.05–0.15–0.70=0.10．

（2）甲离子残留百分比的平均值的估计值为

2×0.15+3×0.20+4×0.30+5×0.20+6×0.10+7×0.05=4.05．

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

3×0.05+4×0.10+5×0.15+6×0.35+7×0.20+8×0.15=6.00．

18．解：（1）由题设及正弦定理得$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.

由$A+B+C=180^{\circ}$，可得$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，故$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

因为$\cos\frac{B}{2}\neq 0$，故$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，因此$B$=60°.

（2）由题设及（1）知$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

由正弦定理得$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(120^{\circ}-C\right)}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$.

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，故$0°<A<90°$，$0°<C<90°$.由（1）知$A+C=120°$，所以$30°<C<90°$，故$\dfrac{1}{2}<a<2$，

从而$\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

19．解：（1）由已知得$AD\parallel BE$，$CG\parallel BE$，所以$AD\parallel CG$，故AD，CG确定一个平面，从而A，C，G，D四点共面.

由已知得$AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故$AB\perp$平面$BCGE$.

又因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面$BCGE$.

（2）取CG的中点M，连结EM，DM.

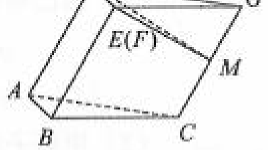
因为$AB//DE$，$AB\perp$平面$BCGE$，所以$DE\perp$平面$BCGE$，故$DE\perp CG$.

由已知，四边形$BCGE$是菱形，且$\angle EBC=60°$得$EM\perp CG$，故$CG\perp$平面DEM.

因此$DM\perp CG$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DEM$中，$DE=1$，$EM=\sqrt{3}$，故$DM=2$.

所以四边形$ACGD$的面积为4.



20. 解：（1） $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令 $f'(x)=0$，得 x=0 或 $x=\dfrac{a}{3}$.

若 a>0， 则当 $x\in(-\infty,0)\bigcup\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$ 时， $f'(x)>0$ ； 当 $x\in\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 时， $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减；

若 a=0， $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

若 a<0， 则当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)\bigcup(0,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ； 当 $x\in\left(\dfrac{a}{3},0\right)$ 时， $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right),(0,+\infty)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{a}{3},0\right)$ 单调递减.

（2）当 $0<a<3$ 时，由（1）知， $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{3},1\right)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在[0,1]的最小值为 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^3}{27}+2$ ，最大值为 $f(0)$=2 或 $f(1)$=$4-a$.于是

$m=-\dfrac{a^3}{27}+2$ ， $M=\begin{cases}4-a,0<a<2,\\2,2\le a<3.\end{cases}$

所以 $M-m=\begin{cases}2-a+\dfrac{a^3}{27},0<a<2,\\\dfrac{a^3}{27},2\le a<3.\end{cases}$

当 $0<a<2$ 时，可知 $2-a+\dfrac{a^3}{27}$ 单调递减，所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{8}{27},2\right)$.

当 $2\le a<3$ 时， $\dfrac{a^3}{27}$ 单调递减，所以 $M-m$ 的取值范围是 $[\dfrac{8}{27},1)$.

综上， $M-m$ 的取值范围是 $[\dfrac{8}{27},2)$.

21．解：（1）设$D\left(t,-\dfrac{1}{2}\right)$, $A\left(x_1,y_1\right)$，则$x_1^2=2y_1$.

由于$y'=x$，所以切线DA的斜率为x_1，故$\dfrac{y_1+\dfrac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$.

整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B\left(x_2,y_2\right)$，同理可得$2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线AB的方程为$2tx-2y+1=0$.

所以直线AB过定点$(0,\dfrac{1}{2})$.

（2）由（1）得直线AB的方程为$y=tx+\dfrac{1}{2}$.

由$\begin{cases}y=tx+\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$，可得$x^2-2tx-1=0$.

于是$x_1+x_2=2t, y_1+y_2=t\left(x_1+x_2\right)+1=2t^2+1$.

设M为线段AB的中点，则$M\left(t,t^2+\dfrac{1}{2}\right)$.

由于$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{EM}=\left(t,t^2-2\right)$，$\overrightarrow{AB}$与向量$(1,t)$平行，所以$t+\left(t^2-2\right)t=0$.解得$t$=0或$t=\pm1$.

当t=0时，$|\overrightarrow{EM}|$=2，所求圆的方程为$x^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=4$；

当$t=\pm1$时，$|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{2}$，所求圆的方程为$x^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=2$.

22.解：（1）由题设可得，弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD}$所在圆的极坐标方程分别为$\rho=2\cos\theta$，$\rho=2\sin\theta$，$\rho=-2\cos\theta$.

所以M_1的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$，$M_2$的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\right)$，$M_3$的极坐标方程为$\rho=-2\cos\theta\left(\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi\right)$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，由题设及（1）知

若$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，则$2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{6}$；

若$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$，则$2\sin\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{2\pi}{3}$；

若$\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$，则$-2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

综上，P的极坐标为$\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$或$\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$或$\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

23．解：（1）由于$[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\le 3\left[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right]$,

故由已知得$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\ge\frac{4}{3}$,

当且仅当$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，$z=-\frac{1}{3}$时等号成立.

所以$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$的最小值为$\frac{4}{3}$.

（2）由于

$[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2$

$=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\le 3\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\right]$,

故由已知$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2 \geq \dfrac{(2+a)^2}{3}$，

当且仅当$x=\dfrac{4-a}{3}$，$y=\dfrac{1-a}{3}$，$z=\dfrac{2a-2}{3}$时等号成立.

因此$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$的最小值为$\dfrac{(2+a)^2}{3}$.

由题设知$\dfrac{(2+a)^2}{3} \geq \dfrac{1}{3}$，解得$a \leq -3$或$a \geq -1$.

绝密★本科目考试启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（理）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

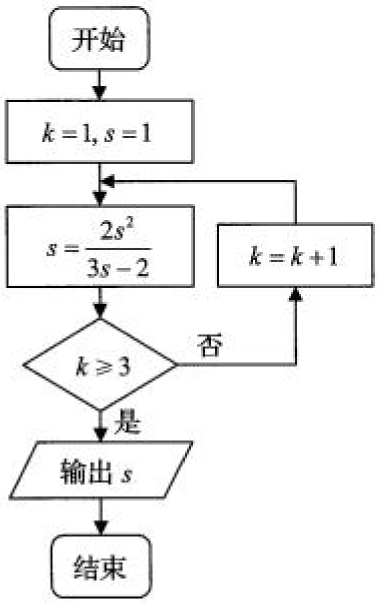
第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数 z=2+i，则 $z\cdot\overline{z}=$

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）3　　（D）5

（2）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为



（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数），则点（1，0）到直线 l 的距离是

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{4}{5}$　　（D）$\dfrac{6}{5}$

（4）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{1}{2}$，则

（A）$a^2=2b^2$　　（B）$3a^2=4b^2$　　（C）$a=2b$　　（D）$3a=4b$

（5）若 x，y 满足 $|x|\le 1-y$，且 $y\ge -1$，则 $3x+y$ 的最大值为

（A）-7　　（B）1　　（C）5　　（D）7

（6）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k（k=1，2）．已知太阳的星等是−26.7，天狼星的星等是−1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

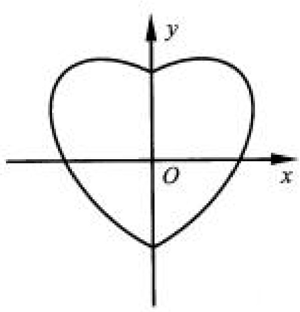
（A）$10^{10.1}$　　（B）10.1　　（C）lg10.1　　（D）$10^{-10.1}$

（7）设点 A，B，C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 C：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图）．给出下列三个结论：



①曲线 C 恰好经过 6 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；

③曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3．

其中，所有正确结论的序号是

（A）① （B）② （C）①② （D）①②③

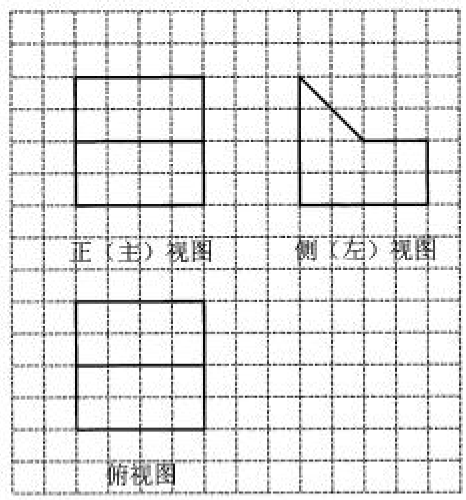
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是__________.

（10）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=-3$，$S_5=-10$，则 $a_5=$__________，S_n 的最小值为__________.

（11）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为__________.



（12）已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$； ②$m\parallel\alpha$； ③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________.

（13）设函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$（a 为常数）．若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a=$________；若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是___________.

（14）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%.

①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付__________元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）在△ABC 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 b，c 的值；

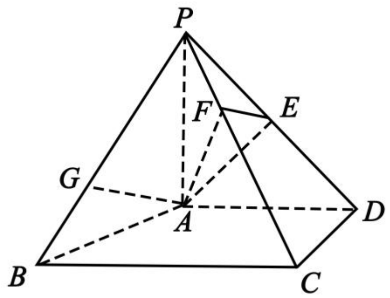
（Ⅱ）求 $\sin(B-C)$ 的值.

（16）（本小题 14 分）如图，在四棱锥 $P\text{–}ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD\,/\!/\,BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$．E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.

（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面 PAD；

（Ⅱ）求二面角 $F\text{–}AE\text{–}P$ 的余弦值；

（Ⅲ）设点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$．判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由.



（17）（本小题 13 分）改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月 A，B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A，B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额（元） 支付方式	（0，1000]	（1000，2000]	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月 A，B 两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查 3 人，发现他们本月的支付金额都大于 2000 元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由．

（18）（本小题 14 分）已知抛物线 C：$x^2=-2py$ 经过点（2，−1）．

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M，N，直线 $y=-1$ 分别交直线 OM，ON 于点 A 和点 B．求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点．

（19）（本小题 13 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\le f(x)\le x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|\,(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 M（a）．当 M（a）最小时，求 a 的值．

（20）（本小题 13 分）已知数列$\{a_n\}$，从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、⋯、第 i_m 项（$i_1<i_2<\cdots<i_m$），若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 a_{i_1}，a_{i_2}，⋯，a_{i_m} 为$\{a_n\}$的长度为 m 的递增子列．规定：数列$\{a_n\}$的任意一项都是$\{a_n\}$的长度为 1 的递增子列．

（Ⅰ）写出数列 1，8，3，7，5，6，9 的一个长度为 4 的递增子列；

（Ⅱ）已知数列$\{a_n\}$的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}，长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}．若 $p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

（Ⅲ）设无穷数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若$\{a_n\}$的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$，且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个（s=1，2，…），求数列$\{a_n\}$的通项公式．

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）D　（2）B　（3）D　（4）B　（5）C　（6）A　（7）C　（8）C

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）$\dfrac{\pi}{2}$　（10）0　-10　（11）40　（12）若$l\perp m$，$l\perp\alpha$，则$m/\!/\alpha$.（答案不唯一）

（13）-1　$(-\infty,0]$　（14）130　15

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$$b^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right).$$

因为$b=c+2$，

所以$(c+2)^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

解得$c=5$.

所以$b=7$.

（Ⅱ）由$\cos B=-\dfrac{1}{2}$得$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得$\sin C=\dfrac{c}{b}\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$是钝角，

所以$\angle C$为锐角.

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{11}{14}$.

所以 $\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

（16）（共14分）

解：（Ⅰ）因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$.

又因为$AD\perp CD$，所以$CD\perp$平面PAD.

（Ⅱ）过A作AD的垂线交BC于点M.

因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp AM$，$PA\perp AD$.

如图建立空间直角坐标系A-xyz，则A（0，0，0），B（2，-1，0），C（2，2，0），D（0，2，0），P（0，0，2）.

因为E为PD的中点，所以E（0，1，1）.

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$,　$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$,　$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{PF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$,　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

设平面AEF的法向量为$\boldsymbol{n}$=（x，y，z），则

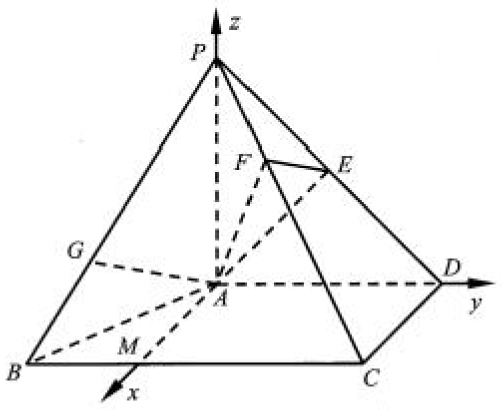
$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}y+z=0,\\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{4}{3}z=0.\end{cases}$$

令z=1，则 $y=-1$,　$x=-1$.

于是 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$.

又因为平面PAD的法向量为$\boldsymbol{p}$=（1，0，0），所以$\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由题知，二面角F-AE-P为锐角，所以其余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



（III）直线AG在平面AEF内.

因为点G在PB上，且$\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$, $\overrightarrow{PB}=(2,-1,-2)$，

所以$\overrightarrow{PG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right),\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

由（II）知，平面AEF的法向量$\boldsymbol{n}$=$(-1,-1,1)$.

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=0$.

所以直线AG在平面AEF内.

（17）（共13分）

解：（I）由题意知，样本中仅使用A的学生有18+9+3=30人，仅使用B的学生有10+14+1=25人，A，B两种支付方式都不使用的学生有5人.

故样本中A，B两种支付方式都使用的学生有100−30−25−5=40人.

所以从全校学生中随机抽取1人，该学生上个月A，B两种支付方式都使用的概率估计为$\dfrac{40}{100}=0.4$.

（II）X的所有可能值为0，1，2.

记事件C为“从样本仅使用A的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”，事件D为“从样本仅使用B的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”.

由题设知，事件C，D相互独立，且$P(C)=\dfrac{9+3}{30}=0.4,\quad P(D)=\dfrac{14+1}{25}=0.6$.

所以$P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=0.24$，

$P(X=1)=P(C\overline{D}\cup\overline{C}D)$

$=P(C)P(\overline{D})+P(\overline{C})P(D)$

=0.4×（1−0.6）+（1−0.4）×0.6

=0.52，

$P(X=0)=P(\overline{C}\overline{D})=P(\overline{C})P(\overline{D})=0.24$.

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	0.24	0.52	0.24

故X的数学期望E（X）=0×0.24+1×0.52+2×0.24=1.

（III）记事件E为“从样本仅使用A的学生中随机抽查3人，他们本月的支付金额都大于2000元”.

假设样本仅使用A的学生中，本月支付金额大于2000元的人数没有变化，则由上个月的样本数据得$P(E)=\dfrac{1}{C_{30}^{3}}=\dfrac{1}{4060}$.

答案示例1：可以认为有变化.理由如下：

P（E）比较小，概率比较小的事件一般不容易发生.一旦发生，就有理由认为本月的支付金额大于2000元的人数发生了变化.所以可以认为有变化.

答案示例2：无法确定有没有变化.理由如下：

事件E是随机事件，P（E）比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，所以无法确定有没有变化.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$，得$p=2$.

所以抛物线C的方程为$x^2=-4y$，其准线方程为$y=1$.

（Ⅱ）抛物线C的焦点为$F(0,-1)$.

设直线l的方程为$y=kx-1(k\neq 0)$.

由$\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2=-4y\end{cases}$得$x^2+4kx-4=0$.

设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，则$x_1x_2=-4$.

直线OM的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$.

令$y=-1$，得点A的横坐标$x_A=-\dfrac{x_1}{y_1}$.

同理得点B的横坐标$x_B=-\dfrac{x_2}{y_2}$.

设点$D(0,n)$，则$\overrightarrow{DA}=\left(-\dfrac{x_1}{y_1},-1-n\right),\overrightarrow{DB}=\left(-\dfrac{x_2}{y_2},-1-n\right)$,

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2$$

$$=\frac{x_1x_2}{\left(-\dfrac{x_1^2}{4}\right)\left(-\dfrac{x_2^2}{4}\right)}+(n+1)^2$$

$$=\frac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2$$

$=-4+(n+1)^2$.

令 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，即 $-4+(n+1)^2=0$，则 $n=1$ 或 $n=-3$.

综上，以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$.

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1$.

令 $f'(x)=1$，即 $\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=1$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{8}{3}$.

又 $f(0)=0$，$f(\dfrac{8}{3})=\dfrac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\dfrac{8}{27}=x-\dfrac{8}{3}$，

即 $y=x$ 与 $y=x-\dfrac{64}{27}$.

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-x,x\in[-2,4]$.

由 $g(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x$.

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{8}{3}$.

$g'(x),g(x)$ 的情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3},4)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6，最大值为 0.

故 $-6\le g(x)\le 0$，即 $x-6\le f(x)\le x$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，

当 $a<-3$ 时，$M(a)\ge F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时，$M(a)\ge F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；

当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$.

综上，当 $M(a)$ 最小时，$a=-3$.

（20）（共13分）

解：（Ⅰ）1，3，5，6.（答案不唯一）

（Ⅱ）设长度为q末项为 a_{n_0} 的一个递增子列为 $a_{r_1},a_{r_2},\cdots,a_{r_{q-1}},a_{n_0}$.

由$p<q$，得 $a_{r_p}\le a_{r_{q-1}}<a_{n_0}$.

因为 $\{a_n\}$ 的长度为p的递增子列末项的最小值为 a_{m_0}，

又 $a_{r_1},a_{r_2},\cdots,a_{r_p}$ 是 $\{a_n\}$ 的长度为p的递增子列，

所以 $a_{m_0}\le a_{r_p}$.

所以 $a_{m_0}<a_{n_0}$.

（Ⅲ）由题设知，所有正奇数都是 $\{a_n\}$ 中的项.

先证明：若$2m$是 $\{a_n\}$ 中的项，则$2m$必排在$2m-1$之前（m为正整数）.

假设$2m$排在$2m-1$之后.

设 $a_{p_1},a_{p_2},\cdots,a_{p_{m-1}},2m-1$ 是数列 $\{a_n\}$ 的长度为m末项为$2m-1$的递增子列，则 $a_{p_1},a_{p_2},\cdots,a_{p_{m-1}},2m-1,2m$ 是数列 $\{a_n\}$ 的长度为$m+1$末项为$2m$的递增子列.与已知矛盾.

再证明：所有正偶数都是 $\{a_n\}$ 中的项.

假设存在正偶数不是$\{a_n\}$中的项，设不在$\{a_n\}$中的最小的正偶数为$2m$.

因为$2k$排在$2k-1$之前（$k=1$，2，…，$m-1$），所以$2k$和$2k-1$不可能在$\{a_n\}$的同一个递增子列中.

又$\{a_n\}$中不超过$2m+1$的数为1，2，…，$2m-2$，$2m-1$，$2m+1$，所以$\{a_n\}$的长度为$m+1$且末项为$2m+1$的递增子列个数至多为$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{(m-1)个}\times1\times1=2^{m-1}<2^m$.

与已知矛盾.

最后证明：$2m$排在$2m-3$之后（$m\geq2$为整数）.

假设存在$2m$（$m\geq2$），使得$2m$排在$2m-3$之前，则$\{a_n\}$的长度为$m+1$且末项为$2m+1$的递增子列的个数小于2^m.

与已知矛盾.

综上，数列$\{a_n\}$只可能为2，1，4，3，…，$2m-3$，$2m$，$2m-1$，⋯.

经验证，数列2，1，4，3，…，$2m-3$，$2m$，$2m-1$，…符合条件.

所以$a_n=\begin{cases}n+1,n为奇数,\\ n-1,n为偶数.\end{cases}$

绝密★本科目考试启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数 学（文）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cup B=$

（A）（–1，1） （B）（1，2） （C）（–1，+∞） （D）（1，+∞）

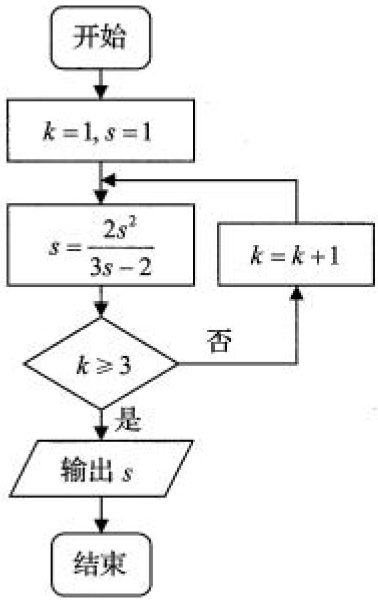
（2）已知复数 $z=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$

（A）$\sqrt{3}$ （B）$\sqrt{5}$ （C）3 （D）5

（3）下列函数中，在区间（0，+∞）上单调递增的是

（A）$y=x^{\frac{1}{2}}$ （B）$y=2^{-x}$ （C）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ （D）$y=\frac{1}{x}$

（4）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为



（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

（5）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的离心率是 $\sqrt{5}$，则 $a=$

（A）$\sqrt{6}$ （B）4 （C）2 （D）$\frac{1}{2}$

（6）设函数 $f(x)=\cos x+b\sin x$（b 为常数），则“$b=0$”是“$f(x)$ 为偶函数”的

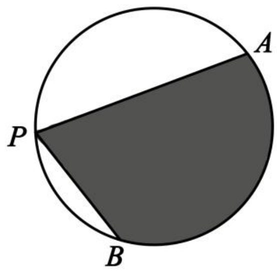
（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（7）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k（k=1,2）．已知太阳的星等是﹣26.7，天狼星的星等是–1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

（A）$10^{10.1}$　　（B）10.1　　（C）lg10.1　　（D）$10^{-10.1}$

（8）如图，A，B 是半径为 2 的圆周上的定点，P 为圆周上的动点，$\angle APB$ 是锐角，大小为β.图中阴影区域的面积的最大值为



（A）$4\beta+4\cos\beta$　　（B）$4\beta+4\sin\beta$　　（C）$2\beta+2\cos\beta$　　（D）$2\beta+2\sin\beta$

第二部分（非选择题　　共 110 分）

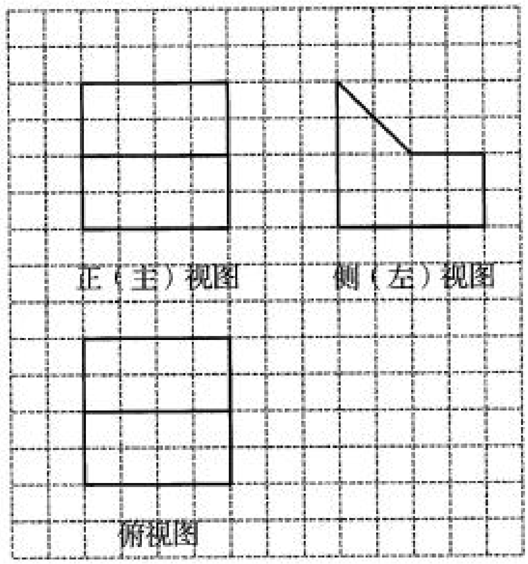
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知向量 $\boldsymbol{a}$ =（–4，3），$\boldsymbol{b}$ =（6，m），且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 m=__________.

（10）若 x，y 满足 $\begin{cases}x\le 2,\\ y\ge -1,\\ 4x-3y+1\ge 0,\end{cases}$ 则 $y-x$ 的最小值为__________，最大值为__________.

（11）设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l．则以 F 为圆心，且与 l 相切的圆的方程为__________.

（12）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为__________.



（13）已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$；②$m\parallel\alpha$；③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________．

（14）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%．

①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付__________元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为__________．

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）在△ABC 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$．

（Ⅰ）求 b，c 的值；

（Ⅱ）求 $\sin(B+C)$ 的值．

（16）（本小题 13 分）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=-10$，且 a_2+10，a_3+8，a_4+6 成等比数列．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_n 的最小值．

（17）（本小题 12 分）改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月 A，B 两种移动支付方式的使用情况，从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A，B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额 / 支付方式	不大于 2 000 元	大于 2 000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

（Ⅰ）估计该校学生中上个月 A，B 两种支付方式都使用的人数；

（Ⅱ）从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人，求该学生上个月支付金额大于 2 000 元的概率；

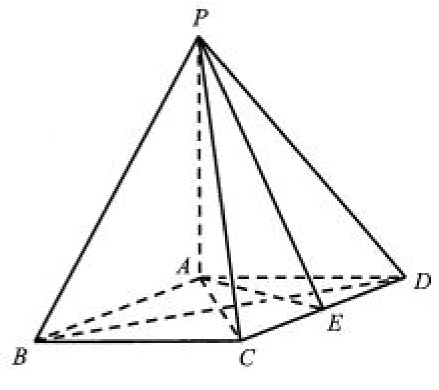
（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人，发现他本月的支付金额大于 2 000 元．结合（Ⅱ）的结果，能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2 000 元的人数有变化？说明理由．

（18）（本小题 14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，底部 $ABCD$ 为菱形，E 为 CD 的中点．

（Ⅰ）求证：$BD\perp$平面 PAC；

（Ⅱ）若$\angle ABC=60^\circ$，求证：平面 $PAB\perp$平面 PAE；

（Ⅲ）棱 PB 上是否存在点 F，使得 $CF\parallel$平面 PAE？说明理由．



（19）（本小题 14 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $(1,0)$，且经过点 $A(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 $l:y=kx+t(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P，Q，直线 AP 与 x 轴交于点 M，直线 AQ 与 x 轴交于点 N，若 $|OM|\cdot|ON|=2$，求证：直线 l 经过定点.

（20）（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\le f(x)\le x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|\,(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 M（a），当 M（a）最小时，求 a 的值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）C　　（2）D　　（3）A　　（4）B

（5）D　　（6）C　　（7）A　　（8）B

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）8　　（10）–3　　1

（11）$(x-1)^2+y^2=4$　　（12）40

（13）若$l\perp m,l\perp\alpha$，则$m\,/\!/\,\alpha$．（答案不唯一）

（14）130　　15

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$b^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times(-\dfrac{1}{2})$．

因为$b=c+2$，

所以$(c+2)^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times(-\dfrac{1}{2})$．

解得$c=5$．

所以$b=7$．

（Ⅱ）由$\cos B=-\dfrac{1}{2}$得$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

由正弦定理得$\sin A=\dfrac{a}{b}\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$．

在$\triangle ABC$中，$B+C=\pi-A$．

所以$\sin(B+C)=\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$．

（16）（共13分）

解：（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为d．

因为$a_1=-10$，

所以$a_2=-10+d, a_3=-10+2d, a_4=-10+3d$．

因为a_2+10, a_3+8, a_4+6成等比数列，

所以$(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$．

所以$(-2+2d)^2=d(-4+3d)$．

解得$d=2$．

所以$a_n=a_1+(n-1)\,d=2n-12$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=2n-12$．

所以，当$n\ge 7$时，$a_n>0$；当$n\le 6$时，$a_n\le 0$．

所以，S_n的最小值为$S_6=-30$．

（17）（共 12 分）

解：（Ⅰ）由题知，样本中仅使用A的学生有27+3=30人，仅使用B的学生有24+1=25人，

A，B两种支付方式都不使用的学生有5人．

故样本中A，B两种支付方式都使用的学生有100–30–25–5=40人．

估计该校学生中上个月A，B两种支付方式都使用的人数为$\frac{40}{100}\times 1000=400$．

（Ⅱ）记事件C为“从样本仅使用B的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于2 000元”，则$P(C)=\frac{1}{25}=0.04$．

（Ⅲ）记事件E为“从样本仅使用B的学生中随机抽查1人，该学生本月的支付金额大于2 000元”．

假设样本仅使用B的学生中，本月支付金额大于2 000元的人数没有变化，则由（II）知，$P(E)=0.04$．

答案示例1：可以认为有变化．理由如下：

$P(E)$ 比较小，概率比较小的事件一般不容易发生，一旦发生，就有理由认为本月支付金额大于2 000元的人数发生了变化．所以可以认为有变化．

答案示例2：无法确定有没有变化．理由如下：

事件E是随机事件，$P(E)$ 比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的．所以无法确定有没有变化．

（18）（共14分）

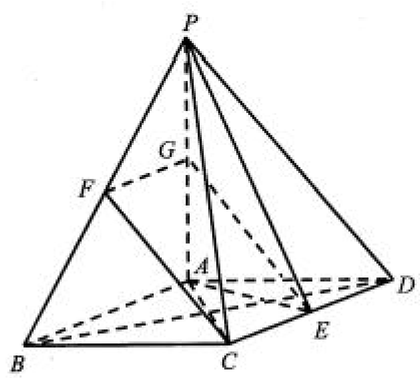
解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面$ABCD$，

所以 $PA\perp BD$．

又因为底面$ABCD$为菱形，

所以 $BD\perp AC$．

所以 $BD\perp$ 平面PAC．



（Ⅱ）因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AE\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp AE$．

因为底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60°$，且E为CD的中点，

所以$AE\perp CD$．

所以$AB\perp AE$．

所以$AE\perp$平面PAB．

所以平面$PAB\perp$平面PAE．

（Ⅲ）棱PB上存在点F，使得$CF\parallel$平面PAE．

取F为PB的中点，取G为PA的中点，连结CF，FG，EG．

则$FG\parallel AB$，且$FG=\dfrac{1}{2}AB$．

因为底面$ABCD$为菱形，且E为CD的中点，

所以$CE\parallel AB$，且$CE=\dfrac{1}{2}AB$．

所以$FG\parallel CE$，且$FG=CE$．

所以四边形$CEGF$为平行四边形．

所以$CF\parallel EG$．

因为$CF\not\subset$平面PAE，$EG\subset$平面PAE，

所以$CF\parallel$平面PAE．

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得，$b^2=1$，$c=1$．

所以$a^2=b^2+c^2=2$．

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．

（Ⅱ）设P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），

则直线AP的方程为$y=\dfrac{y_1-1}{x_1}x+1$．

令y=0，得点M的横坐标 $x_M=-\frac{x_1}{y_1-1}$.

又 $y_1=kx_1+t$，从而 $|OM|=\left|x_M\right|=|\frac{x_1}{kx_1+t-1}|$.

同理，$|ON|=|\frac{x_2}{kx_2+t-1}|$.

由$\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$.

则 $x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\frac{2t^2-2}{1+2k^2}$.

所以$|OM|\cdot|ON|=|\frac{x_1}{kx_1+t-1}|\cdot|\frac{x_2}{kx_2+t-1}|$

$=|\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(t-1)\left(x_1+x_2\right)+(t-1)^2}|$

$=|\frac{\frac{2t^2-2}{1+2k^2}}{k^2\cdot\frac{2t^2-2}{1+2k^2}+k(t-1)\cdot(-\frac{4kt}{1+2k^2})+(t-1)^2}|$

$=2|\frac{1+t}{1-t}|$.

又$|OM|\cdot|ON|=2$,

所以 $2|\frac{1+t}{1-t}|=2$.

解得t=0，所以直线l经过定点（0，0）.

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$.

令 $f'(x)=1$，即 $\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$.

又 $f(0)=0$，$f(\frac{8}{3})=\frac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，

即 $y=x$ 与 $y=x-\frac{64}{27}$.

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-x,x\in[-2,4]$. 由 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$.

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$.

$g'(x),g(x)$ 的情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3},4)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{64}{27}$	$\nearrow$	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6，最大值为 0.

故 $-6\le g(x)\le 0$，即 $x-6\le f(x)\le x$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，当 $a<-3$ 时，$M(a)\ge F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时，$M(a)\ge F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；

当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$.

综上，当 $M(a)$ 最小时，$a=-3$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

·如果事件 A 、B 互斥，那么 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

·如果事件 A 、B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.

·圆柱的体积公式 $V=Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积，h 表示圆柱的高.

·棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积，h 表示棱锥的高.

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\},B=\{2,3,4\},C=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\le x<3\}$ ，则 $(A\bigcap C)\bigcup B=$

A．$\{2\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,4\}$

2．设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\le 0,\\ x-y+2\ge 0,\\ x\ge -1,\\ y\ge -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

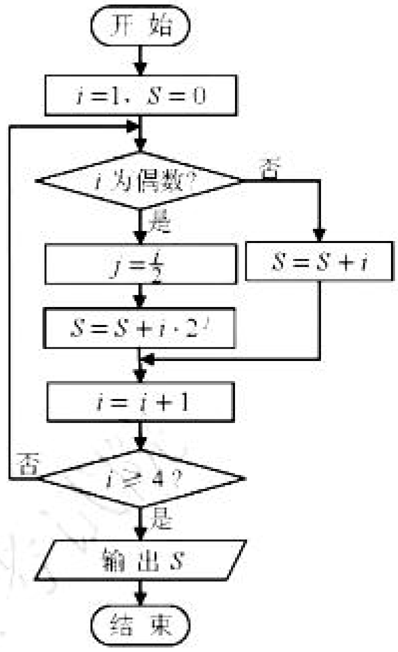
A．2　　B．3　　C．5　　D．6

3．设 $x\in\mathbf{R}$ ，则“ $x^2-5x<0$ ”是“ $|x-1|<1$ ”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

4．阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A．5　　　　B．8　　　　C．24　　　　D．29

5．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

6．已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为

A．$a<c<b$　　　　B．$a<b<c$　　　　C．$b<c<a$　　　　D．$c<a<b$

7．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 是奇函数，将 $y=f\left(x\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g\left(x\right)$．若 $g\left(x\right)$ 的最小正周期为 2π，且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$

A．-2　　　　B．$-\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．2

8．已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leq 1,\\ x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围为

A．$[0,1]$　　B．$[0,2]$　　C．$[0,\mathrm{e}]$　　D．$[1,\mathrm{e}]$

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

第II卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

9．i是虚数单位，则$\left|\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$的值为____________．

10．$\left(2x-\dfrac{1}{8x^3}\right)^8$的展开式中的常数项为____________．

11．已知四棱锥的底面是边长为$\sqrt{2}$的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为____________．

12．设$a\in\mathbf{R}$，直线$ax-y+2=0$和圆$\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）相切，则$a$的值为____________．

13．设$x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5$，则$\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为____________．

14．在四边形$ABCD$中，$AD\,/\!/\,BC,\quad AB=2\sqrt{3},\quad AD=5,\quad \angle A=30^\circ$，点$E$在线段$CB$的延长线上，且$AE=BE$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$____________．

三．解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分13分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c．已知$b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$．

（Ⅰ）求$\cos B$的值；

（Ⅱ）求$\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值．

16．（本小题满分13分）

设甲、乙两位同学上学期间，每天 7：30 之前到校的概率均为$\dfrac{2}{3}$．假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立．

（Ⅰ）用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7：30 之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在 7：30 之前到校的天数比乙同学在 7：30 之前到校的天数恰好多 2”，求事件 M 发生的概率．

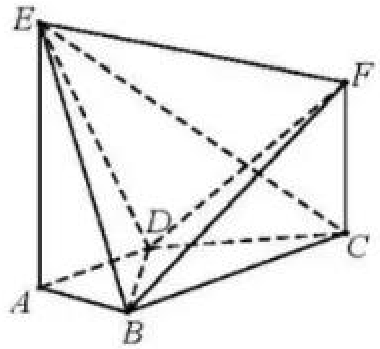
17．（本小题满分 13 分）

如图，$AE\perp$平面$ABCD$，$CF\parallel AE$，$AD\parallel BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$．

（Ⅰ）求证：$BF\parallel$平面ADE；

（Ⅱ）求直线CE与平面BDE所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角$E-BD-F$的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，求线段CF的长．



18．（本小题满分 13 分）

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，上顶点为$B$．已知椭圆的短轴长为 4，离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点P在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点M为直线PB与x轴的交点，点N在y轴的负半轴上．若$|ON|=|OF|$（O为原点），且$OP\perp MN$，求直线PB的斜率．

19．（本小题满分 14 分）

设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列．已知$a_1=4,b_1=6$，$b_2=2a_2-2,b_3=2a_3+4$．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{c_n\}$满足$c_1=1,c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1},\\ b_k, & n=2^k,\end{cases}$其中$k\in\mathbf{N}^*$．

（i）求数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式；

（ii）求$\sum\limits_{i=1}^{2^n} a_i c_i \quad \left(n\in \mathbf{N}^*\right)$.

20．（本小题满分 14 分）

设函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$, $g(x)$为$f\left(x\right)$的导函数.

（Ⅰ）求$f\left(x\right)$的单调区间；

（Ⅱ）当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，证明$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geq 0$；

（Ⅲ）设x_n为函数$u(x)=f(x)-1$在区间$\left(2n\pi+\frac{\pi}{4},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内的零点，其中$n\in\mathbf{N}$，证明$2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

1．D　2．C　3．B　4．B　5．D　6．A　7．C　8．C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 30 分．

9．$\sqrt{13}$　10．28　11．$\dfrac{\pi}{4}$　12．$\dfrac{3}{4}$　13．$4\sqrt{3}$　14．-1

三．解答题

15．本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力，满分 13 分．

（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$，又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$．又因为$b+c=2a$，得到$b=\dfrac{4}{3}a$，$c=\dfrac{2}{3}a$．由余弦定理可得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\frac{1}{4}.$$

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\dfrac{7}{8}$，故

$$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}.$$

16．本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天 7：30 之前到校的概率均为$\dfrac{2}{3}$，故$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，从而$P(X=k)=\mathrm{C}_3^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-k},k=0,1,2,3$．

所以，随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3

P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$．

（Ⅱ）解：设乙同学上学期间的三天中 7：30 之前到校的天数为 Y，则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，且 $M=\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\}$．由题意知事件 $\{X=3,Y=1\}$ 与 $\{X=2,Y=0\}$ 互斥，且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$，事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立，从而由（Ⅰ）知

$$P(M)=P(\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\})=P(X=3,Y=1)+P(X=2,Y=0)$$

$$=P(X=3)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)=\frac{8}{27}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}.$$

17．本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．

依题意，可以建立以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系（如图），可得 $A(0,0,0),\quad B(1,0,0),\quad C(1,2,0),\quad D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$．设 $CF=h\quad(h>0)$，则 $F(1,2,h)$．

（Ⅰ）证明：依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量，又 $\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 BF // 平面 ADE．

（Ⅱ）解：依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0),\quad \overrightarrow{BE}=(-1,0,2),\quad \overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，

可得 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$．因此有 $\cos\left\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{4}{9}$．

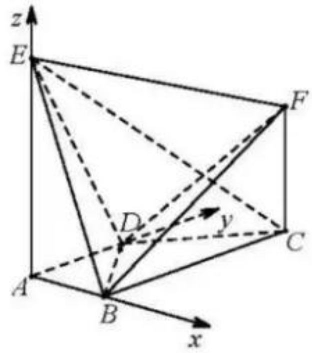
所以，直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$．

（Ⅲ）解：设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 BDF 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ 2y+hz=0,\end{cases}$

不妨令 $y=1$，可得 $\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\frac{2}{h}\right)$．

由题意，有$\left|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得$h=\dfrac{8}{7}$．经检验，符合题意.

所以，线段CF的长为$\dfrac{8}{7}$.



18．本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分 13 分.

（Ⅰ）解：设椭圆的半焦距为c，依题意，$2b=4,\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，又$a^2=b^2+c^2$，可得$a=\sqrt{5}$，$b=2,c=1$.

所以，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）解：由题意，设$P\left(x_P,y_P\right)\left(x_p\neq 0\right),M\left(x_M,0\right)$．设直线$PB$的斜率为$k\left(k\neq 0\right)$，又$B\left(0,2\right)$，则直线$PB$的方程为$y=kx+2$，与椭圆方程联立$\begin{cases}y=kx+2,\\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$整理得$\left(4+5k^2\right)x^2+20kx=0$，可得$x_P=-\dfrac{20k}{4+5k^2}$，代入$y=kx+2$得$y_P=\dfrac{8-10k^2}{4+5k^2}$，进而直线$OP$的斜率$\dfrac{y_P}{x_p}=\dfrac{4-5k^2}{-10k}$．在$y=kx+2$中，令$y=0$，得$x_M=-\dfrac{2}{k}$．由题意得$N\left(0,-1\right)$，所以直线$MN$的斜率为$-\dfrac{k}{2}$．由$OP\perp MN$，得$\dfrac{4-5k^2}{-10k}\cdot\left(-\dfrac{k}{2}\right)=-1$，化简得$k^2=\dfrac{24}{5}$，从而$k=\pm\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

所以，直线PB的斜率为$\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$或$-\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

19．本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前n项和公式等基础知识．考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力．满分 14 分.

（Ⅰ）解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q．依题意得$\begin{cases}6q=6+2d,\\6q^2=12+4d,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=3,\\q=2,\end{cases}$

故$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1, b_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$．

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times2^n$．

（Ⅱ）（i）解：$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=a_{2^n}\left(b_n-1\right)=\left(3\times2^n+1\right)\left(3\times2^n-1\right)=9\times4^n-1$．

所以，数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式为$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=9\times4^n-1$．

（ii）解：$\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i=\sum\limits_{i=1}^{2^n}\left[a_i+a_i\left(c_i-1\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2^i}\left(c_{2^i}-1\right)$

$$=\left(2^n\times4+\frac{2^n\left(2^n-1\right)}{2}\times3\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(9\times4^i-1\right)$$

$$=\left(3\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}\right)+9\times\frac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}-n$$

$$=27\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}-n-12\quad\left(n\in\mathbf{N}^*\right).$$

20．本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想和化归与转化思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解：由已知，有$f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$．因此，当$x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)\ (k\in\mathbf{Z})$时，有$\sin x>\cos x$，得$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减；当$x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\ (k\in\mathbf{Z})$时，有$\sin x<\cos x$，得$f'(x)>0$，则$f(x)$单调递增．

所以，$f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z}), f(x)$的单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$．

（Ⅱ）证明：记$h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$．依题意及（Ⅰ），有$g(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$，从而$g'(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$．当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，故

$h'(x) = f'(x) + g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x)(-1) = g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$.

因此，$h(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，进而$h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

所以，当$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

（III）证明：依题意，$u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$，即$e^{x_n}\cos x_n = 1$．记$y_n = x_n - 2n\pi$，则$y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$，且

$f(y_n) = e^{y_n}\cos y_n = e^{x_n - 2n\pi}\cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi}\ (n \in \mathbf{N})$.

由$f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0)$及（I），得$y_n \geq y_0$．由（II）知，当$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x) < 0$，所以$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$上为减函数，因此$g(y_n) \leq g(y_0) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$．又由（II）知，$f(y_n) + g(y_n)\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) \geq 0$，故

$$\frac{\pi}{2} - y_n \leq -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq \frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)} = \frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0}(\sin y_0 - \cos y_0)} < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

所以，$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（文史类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

• 如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

• 圆柱的体积公式 $V=Sh$，其中 S 表示圆柱的底面面积，h 表示圆柱的高.

• 棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 表示棱锥的底面面积，h 表示棱锥的高.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{x\in \mathbf{R}\,|\,1\leqslant x<3\}$，则 $(A\bigcap C)\bigcup B=$

（A）{2}　　（B）{2，3}　　（C）{−1，2，3}　　（D）{1，2，3，4}

（2）设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2\le 0, \\ x-y+2\ge 0, \\ x\geqslant -1, \\ y\geqslant -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

（A）2　　　　（B）3　　　　（C）5　　　　（D）6

（3）设 $x\in\mathbf{R}$，则“$0<x<5$”是“$|x-1|<1$”的

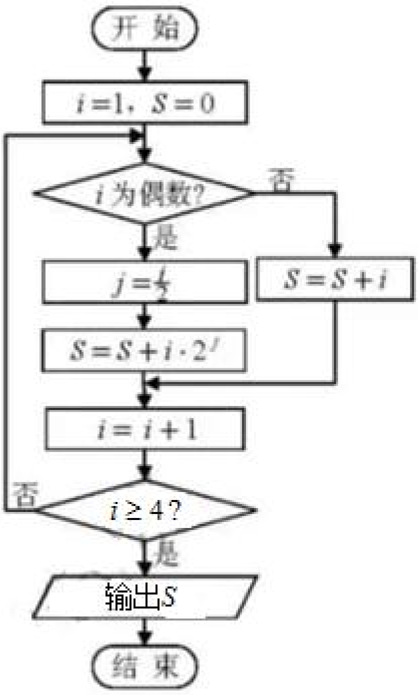
（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充要条件

（D）既不充分也不必要条件

（4）阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



（A）5　　　　（B）8　　　　（C）24　　　　（D）29

（5）已知 $a=\log_2 7, b=\log_3 8, c=0.3^{0.2}$，则 a，b，c 的大小关系为

（A）$c<b<a$　　　　（B）$a<b<c$

（c）$b<c<a$　　　　（D）$c<a<b$

（6）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l.若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{5}$

（7）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 是奇函数，且 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为π，将 $y=f\left(x\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g\left(x\right)$.若 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$

（A）−2　　（B）$-\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\\ \frac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=-\frac{1}{4}x+a(a\in\mathbf{R})$ 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为

（A）$\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$　　（B）$\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$　　（C）$\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$　　（D）$\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（文史类）

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共 12 小题，共 110 分。

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

（9）i 是虚数单位，则 $\left|\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为__________.

（10）设 $x\in\mathbf{R}$，使不等式 $3x^2+x-2<0$ 成立的 x 的取值范围为__________.

（11）曲线 $y=\cos x-\frac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为__________.

（12）已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$.若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为__________.

（13）设 $x>0,\quad y>0,\quad x+2y=4$，则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为__________.

（14）在四边形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC,\quad AB=2\sqrt{3},\quad AD=5,\quad \angle A=30^\circ$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE=BE$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$__________.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（本小题满分 13 分）2019 年，我国施行个人所得税专项附加扣除办法，涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除.某单位老、中、青员工分别有 $72,108,120$ 人，现采用分层抽样的方法，从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

（Ⅰ）应从老、中、青员工中分别抽取多少人？

（Ⅱ）抽取的 25 人中，享受至少两项专项附加扣除的员工有 6 人，分别记为 A, B, C, D, E, F.享受情况如下表，其中“○”表示享受，“×”表示不享受.现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

员工	A	B	C	D	E	F

项目						
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

（i）试用所给字母列举出所有可能的抽取结果；

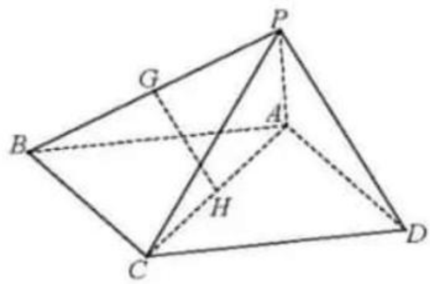
（ii）设 M 为事件“抽取的 2 人享受的专项附加扣除至少有一项相同”，求事件 M 发生的概率.

（16）(本小题满分 13 分)在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c .已知 $b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$.

（Ⅰ）求 $\cos B$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

（17）（本小题满分 13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\triangle PCD$ 为等边三角形，平面 $PAC\perp$ 平面 PCD，$PA\perp CD, CD=2, AD=3$.



（Ⅰ）设 G，H 分别为 PB，AC 的中点，求证：$GH//$ 平面 PAD；

（Ⅱ）求证：$PA\perp$ 平面 PCD；

（Ⅲ）求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

（18）(本小题满分 13 分)设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，已知 $a_1=b_1=3, b_2=a_3, b_3=4a_2+3$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\begin{cases}1, & n\text{为奇数}, \\ b_{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$ 求 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（19）（本小题满分 14 分）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，左顶点为 A，上顶点为 B.已知 $\sqrt{3}|OA|=2|OB|$（O 为原点）.

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P，圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切，圆心 C 在直线 x=4 上，且 $OC// AP$，求椭圆的方程.

（20）（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)\mathrm{e}^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $a\le 0$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

（i）证明 $f(x)$ 恰有两个零点；

（ii）设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1>x_0$，证明 $3x_0-x_1>2$.

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（文史类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算.每小题 5 分，满分 40 分.

（1）D　　（2）C　　（3）B　　（4）B

（5）A　　（6）D　　（7）C　　（8）D

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算.每小题 5 分，满分 30 分.

（9）$\sqrt{13}$　　（10）$\left(-1,\dfrac{2}{3}\right)$　　（11）$x+2y-2=0$

（12）$\dfrac{\pi}{4}$　　（13）$\dfrac{9}{2}$　　（14）-1

三. 解答题

（15）本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识，考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.满分 13 分.

解：（Ⅰ）由已知，老、中、青员工人数之比为$6:9:10$，由于采用分层抽样的方法从中抽取 25 位员工，因此应从老、中、青员工中分别抽取 6 人，9 人，10 人.

（II）（i）从已知的 6 人中随机抽取 2 人的所有可能结果为

$\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{A,F\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\},\{B,F\},\{C,D\},\{C,E\},\{C,F\},$

$\{D,E\},\{D,F\},\{E,F\}$，共 15 种.

（ii）由表格知，符合题意的所有可能结果为

$\{A,B\},\{A,D\},\{A,E\},\{A,F\},\{B,D\},\{B,E\},\{B,F\},\{C,E\},\{C,F\},\{D,F\},\{E,F\}$，共 11 种.

所以，事件 M 发生的概率 $P(M)=\dfrac{11}{15}$.

（16）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识.考查运算求解能力.满分 13 分.

（Ⅰ）解：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $b\sin C=c\sin B$，又由 $3c\sin B=4a\sin C$，得 $3b\sin C=4a\sin C$，即 $3b=4a$.又因为 $b+c=2a$，得到 $b=\dfrac{4}{3}a$，$c=\dfrac{2}{3}a$.由余弦定理可得

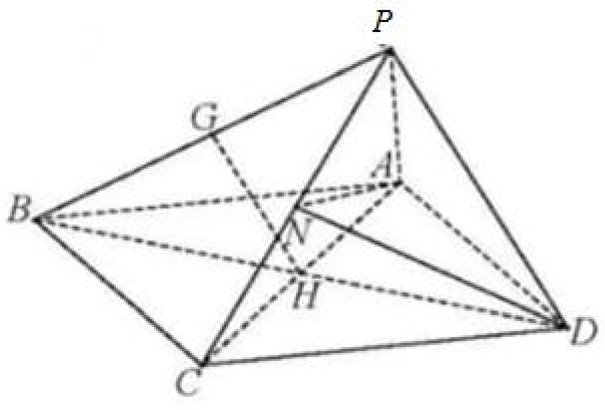
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\frac{1}{4}.$$

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，从而 $\sin 2B=2\sin B\cos B=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\dfrac{7}{8}$，故

$$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}.$$

（17）本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识.考查空间想象能力和推理论证能力.满分 13 分.



（I）证明：连接 BD，易知 $AC\cap BD=H$，$BH=DH$.又由 $BG=PG$，故 $GH\,//\,PD$.又因为 $GH\not\subset$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD，所以 $GH\,//$ 平面 PAD.

（II）证明：取棱 PC 的中点 N，连接 DN.依题意，得 $DN\perp PC$，又因为平面 $PAC\perp$ 平面 PCD，平面 $PAC\cap$

平面 $PCD = PC$，所以 $DN \perp$ 平面 PAC，又 $PA \subset$ 平面 PAC，故 $DN \perp PA$. 又已知 $PA \perp CD$，$CD \cap DN = D$，所以 $PA \perp$ 平面 PCD.

（III）解：连接 AN，由（II）中 $DN \perp$ 平面 PAC，可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角，

因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形，$CD=2$ 且 N 为 PC 的中点，所以 $DN = \sqrt{3}$. 又 $DN \perp AN$，

在 Rt$\triangle AND$ 中，$\sin \angle DAN = \dfrac{DN}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识，考查数列求和的基本方法和运算求解能力.满分 13 分.

（I）解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.依题意，得 $\begin{cases} 3q = 3 + 2d, \\ 3q^2 = 15 + 4d, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d = 3, \\ q = 3, \end{cases}$

故 $a_n = 3 + 3(n-1) = 3n,\quad b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$.

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$.

（II）解：$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$

$= \left(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}\right) + \left(a_2b_1 + a_4b_2 + a_6b_3 + \cdots + a_{2n}b_n\right)$

$= \left[n \times 3 + \dfrac{n(n-1)}{2} \times 6\right] + (6 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + 18 \times 3^3 + \cdots + 6n \times 3^n)$

$= 3n^2 + 6\left(1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n\right)$.

记 $T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n$, ①

则 $3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^{n+1}$, ②

②−①得，$2T_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n\times 3^{n+1}=-\dfrac{3\left(1-3^n\right)}{1-3}+n\times 3^{n+1}=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$.

所以，$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=3n^2+6T_n=3n^2+3\times\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$

$$=\frac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right).$$

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、圆等基础知识.考查用代数方法研究圆锥曲线的性质.考查运算求解能力，以及用方程思想、数形结合思想解决问题的能力.满分 14 分.

（I）解：设椭圆的半焦距为 c，由已知有 $\sqrt{3}a=2b$，又由 $a^2=b^2+c^2$，消去 b 得 $a^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+c^2$，解得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

所以，椭圆的离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（II）解：由（I）知，$a=2c,b=\sqrt{3}c$，故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$.由题意，$F(-c,0)$，则直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}(x+c)$ 点 P 的坐标满足 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1,\\ y=\dfrac{3}{4}(x+c),\end{cases}$ 消去 y 并化简，得到 $7x^2+6cx-13c^2=0$，解得 $x_1=c,x_2=-\dfrac{13c}{7}$.代入到 l 的方程，解得 $y_1=\dfrac{3}{2}c,y_2=-\dfrac{9}{14}c$.因为点 P 在 x 轴上方，所以 $P\left(c,\dfrac{3}{2}c\right)$.由圆心 C 在直线 $x=4$ 上，可设 $C(4,t)$.因为 $OC/\!/AP$，且由（I）知 $A(-2c,0)$，故 $\dfrac{t}{4}=\dfrac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$，解得 $t=2$.

因为圆 C 与 x 轴相切，所以圆的半径长为 2，又由圆 C 与 l 相切，得 $\dfrac{\left|\frac{3}{4}(4+c)-2\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=2$，可得 c=2.

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

（20）本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法.考查函数思想、化归与转化思想.考查综合分析问题和解决问题的能力.满分 14 分.

（Ⅰ）解：由已知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\left[a\mathrm{e}^{x}+a(x-1)\mathrm{e}^{x}\right]=\frac{1-ax^{2}\mathrm{e}^{x}}{x}.$$

因此当 $a\le 0$ 时，$1-ax^{2}\mathrm{e}^{x}>0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

（Ⅱ）证明：（i）由（Ⅰ）知 $f'(x)=\frac{1-ax^{2}\mathrm{e}^{x}}{x}$.令 $g(x)=1-ax^{2}\mathrm{e}^{x}$，由 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，又 $g(1)=1-a\mathrm{e}>0$，且

$$g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^{2}\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^{2}<0.$$

故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，不妨设为 x_0，则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$.

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g\left(x_0\right)}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 内单调递增；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，

$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g\left(x_0\right)}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内单调递减，因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$.从而

$$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\ln\frac{1}{a}-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}+1=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0,$$

又因为 $f\left(x_0\right)>f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内有唯零点.又 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 内有唯一零点 1，从而，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个零点.

（ii）由题意，$\begin{cases} f'(x_0)=0, \\ f(x_1)=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} ax_0^2\mathrm{e}^{x_0}=1, \\ \ln x_1=a(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1}, \end{cases}$ 从而 $\ln x_1=\dfrac{x_1-1}{x_0^2}\mathrm{e}^{x_1-x_0}$，即 $\mathrm{e}^{x_1-x_0}=\dfrac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$.因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $\mathrm{e}^{x_1-x_0}<\dfrac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，两边取对数，得 $\ln\mathrm{e}^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，于是

$x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，

整理得 $3x_0-x_1>2$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学 I

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共4页，均为非选择题(第1题~第20题，共20题)。本卷满分为160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一片交回。

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。

3．请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。

4．作答试题，必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，其中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

柱体的体积 $V=Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

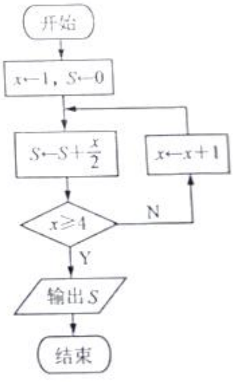
锥体的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高.

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上.

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$，$B=\{x\mid x>0,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$__▲__.

2．已知复数 $(a+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的实部为0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是__▲__.

3．下图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是__▲__.



（第3题）

4．函数 $y=\sqrt{7+6x-x^{2}}$ 的定义域是__▲__.

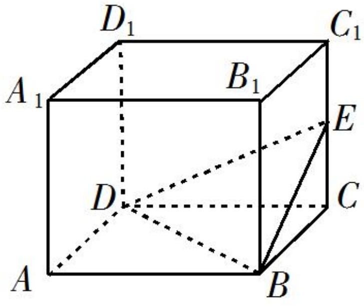
5．已知一组数据 6，7，8，8，9，10，则该组数据的方差是__▲__.

6．从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是__▲__.

7．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^{2}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(b>0)$ 经过点（3，4)，则该双曲线的渐近线方程是__▲__.

8．已知数列 $\{a_{n}\}(n\in\mathbf{N}^{*})$ 是等差数列，S_{n} 是其前 n 项和.若 $a_{2}a_{5}+a_{8}=0,S_{9}=27$，则 S_{8} 的值是__▲__.

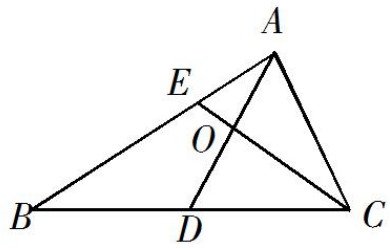
9．如图，长方体 $ABCD-A_{1}B_{1}C_{1}D_{1}$ 的体积是 120，E 为 CC_{1} 的中点，则三棱锥 E-BCD 的体积是__▲__.



10．在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是__▲__.

11．在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点（−e，−1)(e 为自然对数的底数)，则点 A 的坐标是__▲__.

12. 如图，在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，E在边AB上，BE=2EA，AD与CE交于点O.若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则$\dfrac{AB}{AC}$的值是___▲___.



13. 已知$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值是___▲___.

14. 设$f(x),g(x)$是定义在**R**上的两个周期函数，$f(x)$的周期为4，$g(x)$的周期为2，且$f(x)$是奇函数.当$x\in(0,2]$时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2),0<x\le 1\\ -\dfrac{1}{2},1<x\le 2\end{cases}$，其中$k$>0.若在区间(0，9]上，关于$x$的方程$f(x)=g(x)$有8个不同的实数根，则$k$的取值范围是___▲___.

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分14分）在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c.

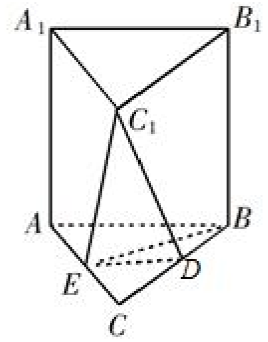
（1）若a=3c，b=$\sqrt{2}$，cos$B$=$\dfrac{2}{3}$，求c的值；

（2）若$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，求$\sin(B+\dfrac{\pi}{2})$的值.

16. （本小题满分14分）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别为BC，AC的中点，AB=BC.

求证：（1）A_1B_1∥平面DEC_1；

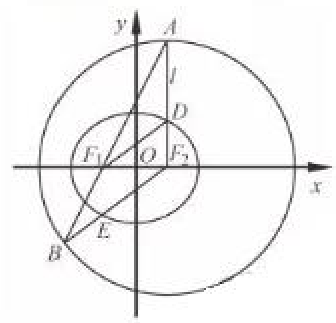
（2）$BE\perp C_1E$.



17．（本小题满分 14 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 F_1（﹣1、0），F_2（1，0）．过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 F_2:$(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D.连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1．已知 $DF_1=\frac{5}{2}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求点 E 的坐标．

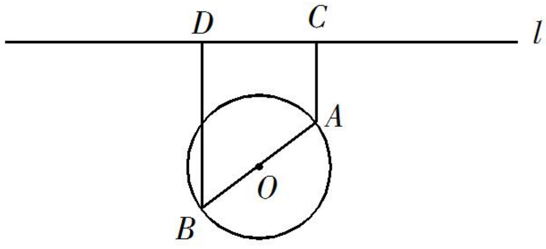


18．（本小题满分 16 分）如图，一个湖的边界是圆心为 O 的圆，湖的一侧有一条直线型公路 l，湖上有桥 AB（AB 是圆 O 的直径）．规划在公路 l 上选两个点 P、Q，并修建两段直线型道路 PB、QA．规划要求：线段 PB、QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径．已知点 A、B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD（C、D 为垂足），测得 AB=10，AC=6，BD=12（单位：百米）．

（1）若道路 PB 与桥 AB 垂直，求道路 PB 的长；

（2）在规划要求下，P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处？并说明理由；

（3）在规划要求下，若道路 PB 和 QA 的长度均为 d（单位：百米）.求当 d 最小时，P、Q 两点间的距离．



19．（本小题满分 16 分）设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c), a,b,c\in\mathbf{R}$、$f'(x)$ 为 f（x）的导函数.

（1）若 $a=b=c$，f（4）=8，求 a 的值；

（2）若 $a\neq b$，$b=c$，且 f（x）和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 f（x）的极小值；

（3）若 $a=0, 0<b\leqslant 1, c=1$，且 f（x）的极大值为 M，求证:$M\leqslant\dfrac{4}{27}$.

20．（本小满分 16 分）定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“M－数列”.

（1）已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$a_2a_4=a_5, a_3-4a_2+4a_4=0$，求证：数列 $\{a_n\}$ 为“M－数列”；

（2）已知数列 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$b_1=1, \dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

①求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

②设 m 为正整数，若存在“M－数列” $\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，对任意正整数 k，当 $k\leqslant m$ 时，都有 $c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$ 成立，求 m 的最大值.

2019年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅰ·参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法.每小题5分，共计70分.

1.$\{1,6\}$　　2.2　　3.5　　4.$[-1,7]$　　5.$\frac{5}{3}$　　6.$\frac{7}{10}$　　7.$y=\pm\sqrt{2}x$

8.16　　9.10　　10.4　　11.$(\mathrm{e},1)$　　12.$\sqrt{3}$　　13.$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　14.$\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

二、解答题

15.本小题主要考查正弦定理、余弦定理、同角三角函数关系、诱导公式等基础知识，考查运算求解能力.满分14分.

解：（1）因为$a=3c,b=\sqrt{2},\cos B=\frac{2}{3}$，

由余弦定理$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得$\frac{2}{3}=\frac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times 3c\times c}$，即$c^2=\frac{1}{3}$.

所以$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）因为$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，

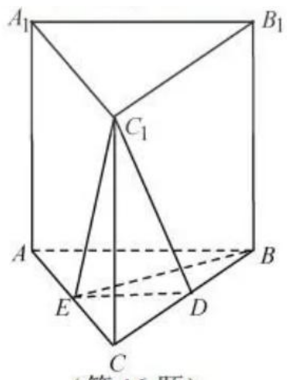
由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{\cos B}{2b}=\frac{\sin B}{b}$，所以$\cos B=2\sin B$.

从而$\cos^2 B=(2\sin B)^2$，即$\cos^2 B=4\left(1-\cos^2 B\right)$，故$\cos^2 B=\frac{4}{5}$.

因为$\sin B>0$，所以$\cos B=2\sin B>0$，从而$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

16.本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考



（第16题）

查空间想象能力和推理论证能力.满分 14 分.

证明：（1）因为 D，E 分别为 BC，AC 的中点，

所以 $ED // AB$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB // A_1B_1$，

所以 $A_1B_1 // ED$.

又因为 $ED\subset$平面 DEC_1，$A_1B_1\not\subset$平面 DEC_1，

所以 $A_1B_1 //$平面 DEC_1.

（2）因为 $AB=BC$，E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱，所以 $CC_1\perp$平面 ABC.

又因为 $BE\subset$平面 ABC，所以 $CC_1\perp BE$.

因为 $C_1C\subset$平面 A_1ACC_1，$AC\subset$平面 A_1ACC_1，$C_1C\cap AC=C$，

所以 $BE\perp$平面 A_1ACC_1.

因为 $C_1E\subset$平面 A_1ACC_1，所以 $BE\perp C_1E$.

17.本小题主要考查直线方程、圆的方程、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、分析问题能力和运算求解能力.满分 14 分.

解：（1）设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，所以 $F_1F_2=2$，$c=1$.

又因为 $DF_1=\frac{5}{2}$，$AF_2\perp x$ 轴，所以 $DF_2=\sqrt{DF_1^2-F_1F_2^2}=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-2^2}=\frac{3}{2}$，

因此 $2a=DF_1+DF_2=4$，从而 $a=2$.

由 $b^2=a^2-c^2$，得 $b^2=3$.

因此，椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

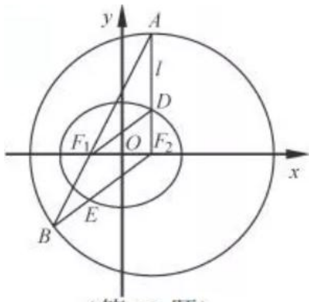
（2）解法一：

由（1）知，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$a=2$，

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以点 A 的横坐标为 1.

将 $x=1$ 代入圆 F_2 的方程$(x-1)^2+y^2=16$，解得 $y=\pm4$.

因为点 A 在 x 轴上方，所以 $A(1，4)$.



（第 17 题）

又 $F_1(-1，0)$，所以直线 AF_1：$y=2x+2$.

由$\begin{cases}y=2x+2\\(x-1)^2+y^2=16\end{cases}$，得 $5x^2+6x-11=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{11}{5}$.

将 $x=-\frac{11}{5}$ 代入 $y=2x+2$，得 $y=-\frac{12}{5}$，

因此 $B(-\frac{11}{5},-\frac{12}{5})$.又 $F_2(1，0)$，所以直线 BF_2：$y=\frac{3}{4}(x-1)$.

由$\begin{cases}y=\frac{3}{4}(x-1)\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $7x^2-6x-13=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{13}{7}$.

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $x=-1$.

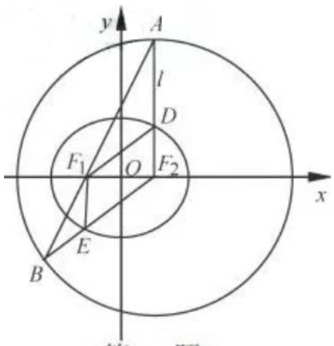
将 $x=-1$ 代入 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，得 $y=-\frac{3}{2}$.因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

解法二：

由（1）知，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.如图，连结 EF_1.

因为 $BF_2=2a$，$EF_1+EF_2=2a$，所以 $EF_1=EB$，

从而$\angle BF_1E=\angle B$.



（第 17 题）

因为 $F_2A=F_2B$，所以$\angle A=\angle B$，

所以$\angle A=\angle BF_1E$，从而 $EF_1 /\!/ F_2A$.

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以 $EF_1\perp x$ 轴.

因为 $F_1(-1，0)$，由$\begin{cases}x=-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $y=\pm\dfrac{3}{2}$.

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $y=-\dfrac{3}{2}$.

因此 $E(-1,-\dfrac{3}{2})$.

18.本小题主要考查三角函数的应用、解方程、直线与圆等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力.满分16分.

解：解法一：

（1）过A作 $AE\perp BD$，垂足为E.

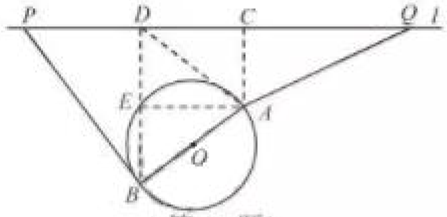
由已知条件得，四边形$ACDE$为矩形，$DE=BE=AC=6,\ AE=CD=8$.'

因为$PB\perp AB$，

所以$\cos\angle PBD=\sin\angle ABE=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

所以$PB=\dfrac{BD}{\cos\angle PBD}=\dfrac{12}{\frac{4}{5}}=15$.

因此道路PB的长为15（百米）.



（第18题）

（2）①若P在D处，由（1）可得E在圆上，则线段BE上的点（除B，E）到点O的距离均小于圆O的半径，所以P选在D处不满足规划要求.

②若Q在D处，连结AD，由（1）知 $AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=10$，

从而 $\cos\angle BAD=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{7}{25}>0$，所以$\angle BAD$为锐角.

所以线段AD上存在点到点O的距离小于圆O的半径.

因此，Q选在D处也不满足规划要求.

综上，P和Q均不能选在D处.

（3）先讨论点P的位置.

当$\angle OBP<90°$时，线段PB上存在点到点O的距离小于圆O的半径，点P不符合规划要求；

当$\angle OBP\geq 90°$时，对线段PB上任意一点F，$OF\geq OB$，即线段PB上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径，点P符合规划要求.

设P_1为l上一点，且$P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，

此时 $P_1D=P_1B\sin\angle P_1BD=P_1B\cos\angle EBA=15\times\dfrac{3}{5}=9$；

当$\angle OBP>90°$时，在$\triangle PP_1B$中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，$d\geq 15$.

再讨论点Q的位置.

由（2）知，要使得$QA\geq 15$，点Q只有位于点C的右侧，才能符合规划要求.当$QA=15$时，$CQ=\sqrt{QA^2-AC^2}=\sqrt{15^2-6^2}=3\sqrt{21}$.此时，线段$QA$上所有点到点$O$的距离均不小于圆$O$的半径.

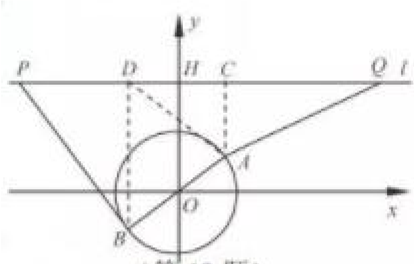
综上，当$PB\perp AB$，点Q位于点C右侧，且$CQ=3\sqrt{21}$时，d最小，此时P，Q两点间的距离$PQ=PD+CD+CQ=17+3\sqrt{21}$.

因此，d最小时，P，Q两点间的距离为$17+3\sqrt{21}$（百米）.

解法二：

（1）如图，过O作$OH\perp l$，垂足为H.

以O为坐标原点，直线OH为y轴，建立平面直角坐标系.



（第 18 题）

因为BD=12，AC=6，所以OH=9，直线l的方程为y=9，点A，B的纵坐标分别为3，−3.

因为AB为圆O的直径，AB=10，所以圆O的方程为$x^2+y^2=25$.

从而A（4，3），B（−4，−3），直线AB的斜率为$\dfrac{3}{4}$.

因为$PB\perp AB$，所以直线PB的斜率为$-\dfrac{4}{3}$，

直线PB的方程为$y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{25}{3}$.

所以P（−13，9），$PB=\sqrt{(-13+4)^2+(9+3)^2}=15$.

因此道路PB的长为15（百米）.

（2）①若P在D处，取线段BD上一点E（−4，0），则EO=4<5，所以P选在D处不满足规划要求.

②若Q在D处，连结AD，由（1）知D（−4，9），又A（4，3），

所以线段AD：$y=-\dfrac{3}{4}x+6(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

在线段AD上取点M（3，$\dfrac{15}{4}$），因为$OM=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2}<\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以线段AD上存在点到点O的距离小于圆O的半径.

因此Q选在D处也不满足规划要求.

综上，P和Q均不能选在D处.

（3）先讨论点P的位置.

当$\angle OBP<90°$时，线段PB上存在点到点O的距离小于圆O的半径，点P不符合规划要求；

当$\angle OBP\geqslant 90°$时，对线段PB上任意一点F，$OF\geq OB$，即线段PB上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径，点P符合规划要求.

设P_1为l上一点，且$P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，此时P_1（-13，9）；

当$\angle OBP>90°$时，在$\triangle PP_1B$中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，$d\geq 15$.

再讨论点Q的位置.

由（2）知，要使得$QA\geq 15$，点Q只有位于点C的右侧，才能符合规划要求.当$QA=15$时，设Q（a，9），由$AQ=\sqrt{(a-4)^2+(9-3)^2}=15(a>4)$，得$a=4+3\sqrt{21}$，所以$Q$（$4+3\sqrt{21}$，9），此时，线段$QA$上所有点到点$O$的距离均不小于圆$O$的半径.

综上，当P（-13，9），Q（$4+3\sqrt{21}$，9）时，d最小，此时P，Q两点间的距离

$PQ=4+3\sqrt{21}-(-13)=17+3\sqrt{21}$.

因此，d最小时，P，Q两点间的距离为$17+3\sqrt{21}$（百米）.

19. 本小题主要考查利用导数研究函数的性质，考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力. 满分16分.

解：（1）因为$a=b=c$，所以$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$.

因为$f(4)=8$，所以$(4-a)^3=8$，解得$a=2$.

（2）因为$b=c$，

所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)$．令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\frac{2a+b}{3}$．

因为 $a,b,\frac{2a+b}{3}$，都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，

所以 $\frac{2a+b}{3}=1,a=3,b=-3$．

此时 $f(x)=(x-3)(x+3)^2$，$f'(x)=3(x+3)(x-1)$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$．列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$．

（3）因为 $a=0,c=1$，所以 $f(x)=x(x-b)(x-1)=x^3-(b+1)x^2+bx$，

$f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$．

因为 $0<b\leq 1$，所以 $\Delta=4(b+1)^2-12b=(2b-1)^2+3>0$，

则 $f'(x)$ 有2个不同的零点，设为 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$．

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3},x_2=\frac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$．

列表如下：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$\left(x_1, x_2\right)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极大值 $M = f\left(x_1\right)$.

解法一：

$M = f\left(x_1\right) = x_1^3 - (b+1)x_1^2 + bx_1$

$=[3x_1^2 - 2(b+1)x_1 + b]\left(\frac{x_1}{3} - \frac{b+1}{9}\right) - \frac{2\left(b^2 - b + 1\right)}{9}x_1 + \frac{b(b+1)}{9}$

$= \frac{-2\left(b^2 - b + 1\right)(b+1)}{27} + \frac{b(b+1)}{9} + \frac{2}{27}\left(\sqrt{b^2 - b + 1}\right)^3$

$= \frac{b(b+1)}{27} - \frac{2(b-1)^2(b+1)}{27} + \frac{2}{27}(\sqrt{b(b-1)+1})^3$

$\le \frac{b(b+1)}{27} + \frac{2}{27} \le \frac{4}{27}$. 因此 $M \le \frac{4}{27}$.

解法二：

因为 $0 < b \le 1$，所以 $x_1 \in (0,1)$.

当 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) = x(x-b)(x-1) \le x(x-1)^2$.

令 $g(x) = x(x-1)^2, x \in (0,1)$，则 $g'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$.

令 $g'(x) = 0$，得 $x = \frac{1}{3}$. 列表如下：

x	$(0, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$

$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，且是最大值，故 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\le g(x)\le\dfrac{4}{27}$，因此 $M\le\dfrac{4}{27}$.

20．本小题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识，考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力．满分16分．

解：（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，所以$a_1\neq 0$，$q\neq 0$.

由$\begin{cases}a_2a_4=a_5\\ a_3-4a_2+4a_1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}a_1^2q^4=a_1q^4\\ a_1q^2-4a_1q+4a_1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\ q=2\end{cases}$.

因此数列$\{a_n\}$为“M—数列”.

（2）①因为$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，所以$b_n\neq 0$.

由$b_1=1,S_1=b_1$，得$\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{b_2}$，则$b_2=2$.

由$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，得$S_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}$，

当$n\ge 2$时，由$b_n=S_n-S_{n-1}$，得$b_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2\left(b_{n+1}-b_n\right)}-\dfrac{b_{n-1}b_n}{2\left(b_n-b_{n-1}\right)}$，

整理得$b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$.

所以数列$\{b_n\}$是首项和公差均为1的等差数列.

因此，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

②由①知，$b_k=k$，$k\in\mathbf{N}^*$.

因为数列$\{c_n\}$为"M－数列"，设公比为q，所以$c_1=1$，$q>0$.

因为$c_k\le b_k\le c_{k+1}$，所以$q^{k-1}\le k\le q^k$，其中$k=1$，2，3，…，m.

当$k=1$时，有$q\geqslant 1$；

当$k=2$，3，…，m时，有$\dfrac{\ln k}{k}\le \ln q\le \dfrac{\ln k}{k-1}$.

设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令$f'(x)=0$，得$x=\mathrm{e}$.列表如下：

x	$(1,\mathrm{e})$	e	(e，$+\infty$)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

因为$\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 8}{6}<\dfrac{\ln 9}{6}=\dfrac{\ln 3}{3}$，所以$f(k)_{\max}=f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}$.

取$q=\sqrt[3]{3}$，当$k=1$，2，3，4，5时，$\dfrac{\ln k}{k}\leqslant\ln q$，即$k\le q^k$，

经检验知$q^{k-1}\le k$也成立.

因此所求m的最大值不小于5.

若$m\ge 6$，分别取$k=3$，6，得$3\le q^3$，且$q^5\le 6$，从而$q^{15}\ge 243$，且$q^{15}\le 216$，

所以q不存在.因此所求m的最大值小于6.

综上，所求m的最大值为5.

数学Ⅱ(附加题)

21．【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两小题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A.[选修 4−2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

（1）求$\boldsymbol{A}^2$;

（2）求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

B.[选修4−4：坐标系与参数方程]（本小题满分10分）

在极坐标系中，已知两点 $A\left(3,\frac{\pi}{4}\right),B\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)$，直线$l$的方程为$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3$.

（1）求A，B两点间的距离；（2）求点B到直线l的距离.

C.[选修4−5：不等式选讲]（本小题满分10分）

设 $x\in\mathbf{R}$，解不等式$|x|+|2x-1|>2$.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22.（本小题满分10分）设$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,n\geqslant 4,n\in\mathbf{N}^*$.已知$a_3^2=2a_2a_4$.

（1）求n的值；（2）设$(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中$a,b\in\mathbf{N}^*$，求$a^2-3b^2$的值.

23.（本小题满分 10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\ldots,(n,0)\}$，

$B_n=\{(0,1),(n,1)\},C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\},n\in\mathbf{N}^*$.

令$M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$.从集合M_n中任取两个不同的点，用随机变量X表示它们之间的距离.

（1）当n=1时，求X的概率分布；

（2）对给定的正整数n（$n\geq 3$），求概率P（$X\leq n$）（用n表示）.

数学Ⅱ(附加题)参考答案

21．【选做题】

A．[选修4－2：矩阵与变换]

本小题主要考查矩阵的运算、特征值等基础知识，考查运算求解能力．满分10分．

解：（1）因为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，

所以$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3\times3+1\times2 & 3\times1+1\times2\\ 2\times3+2\times2 & 2\times1+2\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 5\\ 10 & 6\end{bmatrix}$.

（2）矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4.$$

令$f(\lambda)=0$，解得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=4$.

B．[选修4－4：坐标系与参数方程]

本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力．满分10分．

解：（1）设极点为O.在△OAB中，A（3，$\frac{\pi}{4}$），B（$\sqrt{2}$，$\frac{\pi}{2}$），

由余弦定理，得$AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{5}$.

（2）因为直线l的方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=3$，

则直线l过点$(3\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.

又$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，所以点$B$到直线$l$的距离为$(3\sqrt{2}-\sqrt{2})\times\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=2$.

C．[选修4–5：不等式选讲]

本小题主要考查解不等式等基础知识，考查运算求解和推理论证能力．满分10分．

解：当$x<0$时，原不等式可化为$-x+1-2x>2$，解得$x<-\frac{1}{3}$；

当$0\le x\le\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$x+1-2x>2$，即$x<-1$，无解；

当$x>\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$x+2x-1>2$，解得$x>1$.

综上，原不等式的解集为$\{x\,|\,x<-\frac{1}{3}\text{或}x>1\}$.

22.【必做题】本小题主要考查二项式定理、组合数等基础知识，考查分析问题能力与运算求解能力，满分10分．

解：（1）因为$(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$，$n\ge 4$，

所以$a_2=\mathrm{C}_n^2=\frac{n(n-1)}{2},a_3=\mathrm{C}_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$，

$a_4=\mathrm{C}_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

因为$a_3^2=2a_2a_4$，

所以$[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}]^2=2\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$，

解得$n=5$.

（2）由（1）知，$n=5$.

$(1+\sqrt{3})^n=(1+\sqrt{3})^5$

$=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5$

$=a+b\sqrt{3}$.

解法一：

因为$a,b\in\mathbf{N}^*$，所以$a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=76,b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$，

从而$a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

解法二：

$(1-\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1(-\sqrt{3})+C_5^2(-\sqrt{3})^2+C_5^3(-\sqrt{3})^3+C_5^4(-\sqrt{3})^4+C_5^5(-\sqrt{3})^5$

$=C_5^0-C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2-C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4-C_5^5(\sqrt{3})^5$.

因为$a,b\in\mathbf{N}^*$，所以$(1-\sqrt{3})^5=a-b\sqrt{3}$.

因此$a^2-3b^2=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^5\times(1-\sqrt{3})^5=(-2)^5=-32$.

23．【必做题】本小题主要考查计数原理、古典概型、随机变量及其概率分布等基础知识，考查逻辑思维能力和推理论证能力．满分10分．

解：（1）当$n=1$时，X的所有可能取值是1，$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{5}$.

X的概率分布为$P(X=1)=\frac{7}{C_6^2}=\frac{7}{15},P(X=\sqrt{2})=\frac{4}{C_6^2}=\frac{4}{15}$，

$P(X=2)=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15},P(X=\sqrt{5})=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15}$.

（2）设$A(a,b)$和$B(c,d)$是从M_n中取出的两个点．

因为$P(X\le n)=1-P(X>n)$，所以仅需考虑$X>n$的情况．

①若$b=d$，则$AB\le n$，不存在$X>n$的取法；

②若$b=0$，$d=1$，则$AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\le\sqrt{n^2+1}$，所以$X>n$当且仅当$AB=\sqrt{n^2+1}$，此时$a=0$，$c=n$或$a=n$，$c=0$，有2种取法；

③若$b=0$，$d=2$，则$AB=\sqrt{(a-c)^2+4}\le\sqrt{n^2+4}$，因为当$n\ge 3$时，$\sqrt{(n-1)^2+4}\le n$，所以$X>n$当且仅当$AB=\sqrt{n^2+4}$，此时$a=0$，$c=n$或$a=n$，$c=0$，有2种取法；

④若$b=1$，$d=2$，则$AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\le\sqrt{n^2+1}$，所以$X>n$当且仅当$AB=\sqrt{n^2+1}$，此时$a=0$，$c=n$或$a=n$，$c=0$，有2种取法.

综上，当$X>n$时，X的所有可能取值是$\sqrt{n^2+1}$和$\sqrt{n^2+4}$，且

$$P(X=\sqrt{n^2+1})=\frac{4}{\mathrm{C}_{2n+4}^2},P(X=\sqrt{n^2+4})=\frac{2}{\mathrm{C}_{2n+4}^2}.$$

因此，$P(X\le n)=1-P(X=\sqrt{n^2+1})-P(X=\sqrt{n^2+4})=1-\dfrac{6}{\mathrm{C}_{2n+4}^2}$.

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数　学

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共 4 页，选择题部分 1 至 2 页；非选择题部分 3 至 4 页。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考生注意：

1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填在试题卷和答题纸规定的位置上。

2．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

若事件 A，B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

若事件 A，B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

台体的体积公式 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

柱体的体积公式 $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$， $B=\{-1,0,1\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A． $\{-1\}$　　B． $\{0,1\}$

C． $\{-1,2,3\}$　　D． $\{-1,0,1,3\}$

2．渐近线方程为 $x\pm y=0$ 的双曲线的离心率是

A． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1

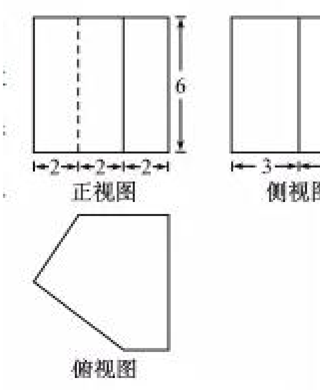
C． $\sqrt{2}$　　D．2

3．若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-3y+4\geq 0 \\ 3x-y-4\leq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值是

A． -1　　B．1

C．10　　D．12

4．祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家，他提出的“幂势既同，则积不容异”称为祖暅原理，利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{柱体}=Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高．若某柱体的三视图如图所示（单位：cm），则该柱体的体积（单位：cm^3）是



A．158　　　　　　　　　　B．162

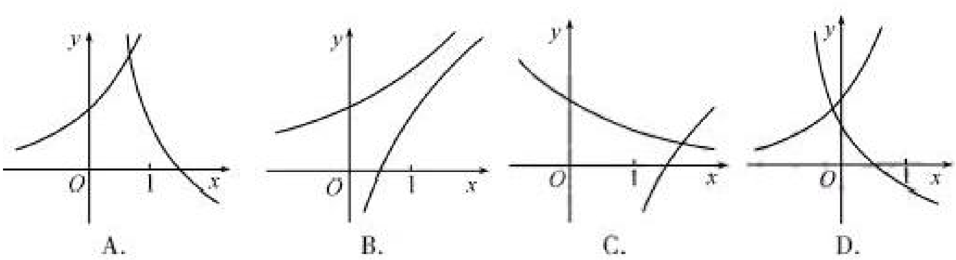
C．182　　　　　　　　　　D．324

5．若 $a>0$，$b>0$，则“$a+b\leqslant 4$”是 “$ab\leqslant 4$”的

A．充分不必要条件　　　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

6．在同一直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{a^x}$，$y=\log_a(x+\frac{1}{2})(a>0$，且 $a\neq 1)$的图象可能是



7．设 $0<a<1$，则随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在（0,1）内增大时，

A．D（X）增大　　　　　　B．D（X）减小

C．D（X）先增大后减小　　　D．D（X）先减小后增大

8．设三棱锥 $V–ABC$ 的底面是正三角形，侧棱长均相等，P 是棱 VA 上的点（不含端点）．记直线 PB 与直线 AC 所成的角为α，直线 PB 与平面 ABC 所成的角为β，二面角 $P–AC–B$ 的平面角为γ，则

A．$\beta<\gamma$，$\alpha<\gamma$　　　　　　B．$\beta<\alpha$，$\beta<\gamma$

C．$\beta<\alpha$，$\gamma<\alpha$　　　　　　D．$\alpha<\beta$，$\gamma<\beta$

9．已知$a,b\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}x,x<0\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\geq 0\end{cases}$．若函数$y=f(x)-ax-b$恰有 3 个零点，则

A．$a<-1$，$b<0$　　B．$a<-1$，$b>0$

C．$a>-1$，$b<0$　　D．$a>-1$，$b>0$

10．设 a，$b\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=a_n^2+b$，$b\in\mathbf{N}^*$，则

A．当 $b=\frac{1}{2}$ 时，$a_{10}>10$　　B．当 $b=\frac{1}{4}$ 时，$a_{10}>10$

C．当 $b=-2$ 时，$a_{10}>10$　　D．当 $b=-4$ 时，$a_{10}>10$

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11．复数$z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}$（i 为虚数单位），则$|z|=$__________.

12．已知圆 C 的圆心坐标是$(0,m)$，半径长是 r .若直线$2x-y+3=0$与圆 C 相切于点$A(-2,-1)$，则 $m=$__________，$r=$__________.

13．在二项式$(\sqrt{2}+x)^9$的展开式中，常数项是__________，系数为有理数的项的个数是__________.

14．在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45°$，则$BD=$____，$\cos\angle ABD=$__________.

15．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，若线段$PF$的中点在以原点$O$为圆心，$|OF|$为半径的圆上，则直线$PF$的斜率是__________.

16．已知$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=ax^3-x$，若存在$t\in\mathbf{R}$，使得$|f(t+2)-f(t)|\leq\frac{2}{3}$，则实数$a$的最大值是____.

17．已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，当每个$\lambda_i(i=1,2,3,4,5,6)$取遍±1时，$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$的最小值是__________，最大值是__________.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本小题满分 14 分）设函数 $f(x)=\sin x, x\in\mathbf{R}$.

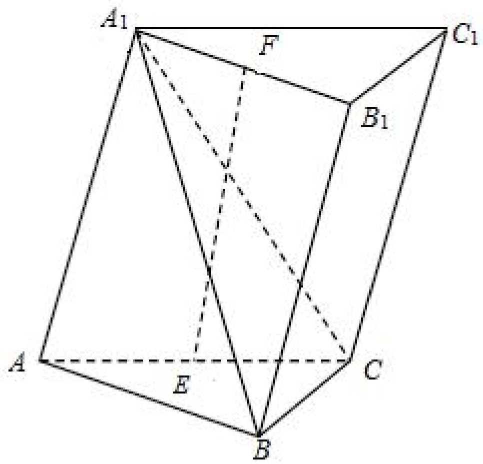
（1）已知 $\theta\in[0,2\pi)$, 函数 $f(x+\theta)$ 是偶函数，求 θ 的值；

（2）求函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域.

19.（本小题满分 15 分）如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC, $\angle ABC=90°$，$\angle BAC=30°, A_1A=A_1C=AC, E, F$ 分别是 AC，A_1B_1 的中点.

（1）证明：$EF\perp BC$；

（2）求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.



20.（本小题满分 15 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=4$，$a_4=S_3$，数列 $\{b_n\}$ 满足：对每个 $n\in\mathbf{N}^*, S_n+b_n, S_{n+1}+b_n, S_{n+2}+b_n$ 成等比数列.

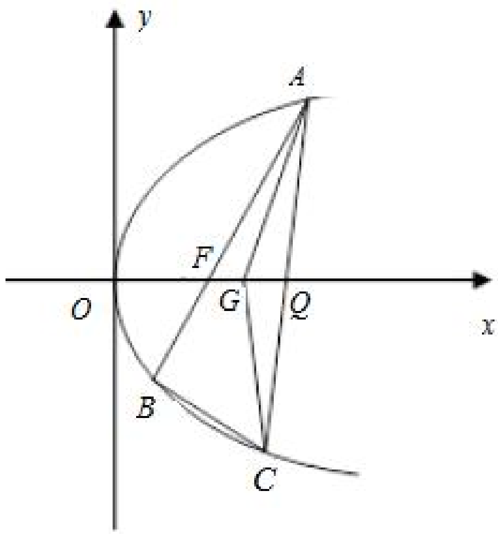
（1）求数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}, n\in\mathbf{N}^*$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}, n\in\mathbf{N}^*$.

21．（本小题满分 15 分）如图，已知点 $F(1,0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，点 C 在抛物线上，使得△ABC 的重心 G 在 x 轴上，直线 AC 交 x 轴于点 Q，且 Q 在点 F 的右侧．记△AFG,△CQG 的面积分别为 S_1,S_2．

（1）求 p 的值及抛物线的标准方程；

（2）求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标．



22．（本小题满分 15 分）

已知实数 $a\neq 0$，设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{x+1},x>0.$

（1）当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）对任意 $x\in[\dfrac{1}{e^2},+\infty)$ 均有 $f(x)\leq\dfrac{\sqrt{x}}{2a}$，求 a 的取值范围．

注：e=2.71828…为自然对数的底数．

2019年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数 学 参 考 答 案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分40分。

1．A　2．C　3．C　4．B　5．A

6．D　7．D　8．B　9．C　10．A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。

11．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　12．$-2,\sqrt{5}$　13．$16\sqrt{2},5$　14．$\frac{12\sqrt{2}}{5},\frac{7\sqrt{2}}{10}$

15．$\sqrt{15}$　16．$\frac{4}{3}$　17．$0,2\sqrt{5}$

三、解答题：本大题共5小题，共74分。

18．本题主要考查三角函数及其恒等变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分14分。

（1）因为$f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$是偶函数，所以，对任意实数$x$都有$\sin(x+\theta)=\sin(-x+\theta)$，

即$\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta=-\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta$，

故$2\sin x\cos\theta=0$，

所以$\cos\theta=0$.

又$\theta\in[0,2\pi)$，因此$\theta=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$.

（2）$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x\right)$$

$=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

因此，函数的值域是$[1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$.

19．**本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分15分。**

方法一：

（1）连接A_1E，因为$A_1A=A_1C$，E是AC的中点，所以$A_1E\perp AC$.

又平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC，$A_1E\subset$平面A_1ACC_1，

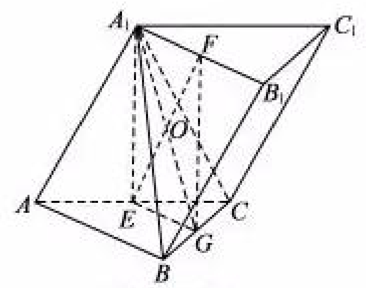
平面$A_1ACC_1\cap$平面$ABC=AC$，

所以，$A_1E\perp$平面ABC，则$A_1E\perp BC$.

又因为$A_1F\parallel AB$，$\angle ABC=90°$，故$BC\perp A_1F$.

所以$BC\perp$平面A_1EF.

因此$EF\perp BC$.



第 19 题图

（2）取BC中点G，连接EG，GF，则$EGFA_1$是平行四边形.

由于$A_1E\perp$平面ABC，故$A_1E\perp EG$，所以平行四边形$EGFA_1$为矩形.

由（1）得$BC\perp$平面$EGFA_1$，则平面$A_1BC\perp$平面$EGFA_1$，

所以EF在平面A_1BC上的射影在直线A_1G上.

连接A_1G交EF于O，则$\angle EOG$是直线EF与平面A_1BC所成的角（或其补角）.

不妨设AC=4，则在Rt△A_1EG中，$A_1E=2\sqrt{3}$，$EG=\sqrt{3}$.

由于O为A_1G的中点，故$EO=OG=\dfrac{A_1G}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

所以$\cos\angle EOG=\dfrac{EO^2+OG^2-EG^2}{2EO\cdot OG}=\dfrac{3}{5}$.

因此，直线EF与平面A_1BC所成角的余弦值是$\dfrac{3}{5}$.

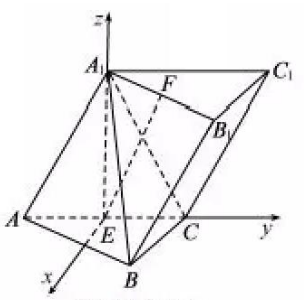
方法二：

（1）连接A_1E，因为$A_1A=A_1C$，E是AC的中点，所以$A_1E\perp AC$.

又平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC，$A_1E\subset$平面A_1ACC_1，

平面$A_1ACC_1\cap$平面$ABC=AC$，所以，$A_1E\perp$平面ABC.

如图，以点E为原点，分别以射线EC，EA_1为y，z轴的正半轴，建立空间直角坐标系E–xyz.



第 19 题图

不妨设AC=4，则

A_1（0，0，$2\sqrt{3}$），B（$\sqrt{3}$，1，0），$B_1(\sqrt{3},3,2\sqrt{3})$，$F(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},2\sqrt{3})$，$C$(0，2，0).

因此，$\overrightarrow{EF}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$.

由$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$得$EF\perp BC$.

（2）设直线EF与平面A_1BC所成角为θ.

由（1）可得 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,2,-2\sqrt{3})$.

设平面A_1BC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ A_1C\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

取$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，故$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{5}$，

因此，直线EF与平面A_1BC所成的角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$.

20．本题主要考查等差数列、等比数列、数列求和、数学归纳法等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。

（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意得

$a_1+2d=4,a_1+3d=3a_1+3d$，

解得$a_1=0,d=2$.

从而$a_n=2n-2,n\in\mathbf{N}^*$.

所以$S_n=n^2-n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

由$S_n+b_n,S_{n+1}+b_n,S_{n+2}+b_n$成等比数列得

$\left(S_{n+1}+b_n\right)^2=\left(S_n+b_n\right)\left(S_{n+2}+b_n\right)$.

解得$b_n=\dfrac{1}{d}\left(S_{n+1}^2-S_nS_{n+2}\right)$.

所以$b_n=n^2+n,n\in\mathbf{N}^*$.

（2）$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}=\sqrt{\dfrac{2n-2}{2n(n+1)}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n(n+1)}},n\in\mathbf{N}^*$.

我们用数学归纳法证明.

（i）当n=1时，c_1=0<2，不等式成立；

（ii）假设$n=k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$时不等式成立，即$c_1+c_2+\cdots+c_k<2\sqrt{k}$.

那么，当$n=k+1$时，

$$c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}<2\sqrt{k}+\sqrt{\frac{k}{(k+1)(k+2)}}<2\sqrt{k}+\sqrt{\frac{1}{k+1}}$$

$$<2\sqrt{k}+\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2\sqrt{k}+2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2\sqrt{k+1}.$$

即当$n=k+1$时不等式也成立.

根据（i）和（ii），不等式$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$成立.

21．**本题主要考查抛物线的几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。**

（1）由题意得$\dfrac{p}{2}=1$，即p=2.

所以，抛物线的准线方程为x=−1.

（2）设$A\left(x_A,y_A\right),B\left(x_B,y_B\right),C\left(x_c,y_c\right)$，重心$G\left(x_G,y_G\right)$.令$y_A=2t,t\neq 0$，则$x_A=t^2$.

由于直线AB过F，故直线AB方程为$x=\dfrac{t^2-1}{2t}y+1$，代入$y^2=4x$，得

$$y^2-\frac{2\left(t^2-1\right)}{t}y-4=0,$$

故$2ty_B=-4$，即$y_B=-\dfrac{2}{t}$，所以$B\left(\dfrac{1}{t^2},-\dfrac{2}{t}\right)$.

又由于 $x_G=\frac{1}{3}\left(x_A+x_B+x_c\right), y_G=\frac{1}{3}\left(y_A+y_B+y_c\right)$ 及重心 G 在 x 轴上，故 $2t-\frac{2}{t}+y_c=0$，得 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2, 2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right), G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}, 0\right)$.

所以，直线AC方程为 $y-2t=2t\left(x-t^2\right)$，得 $Q\left(t^2-1, 0\right)$.

由于Q在焦点F的右侧，故 $t^2>2$.从而

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot\left|y_A\right|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot\left|y_c\right|}=\frac{\left|\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}-1\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}.$$

令 $m=t^2-2$，则m>0，

$$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant 2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当 $m=\sqrt{3}$ 时，$\frac{S_1}{S_2}$ 取得最小值 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时G（2，0）.

22．本题主要考查函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考查逻辑思维能力和综合应用能力。满分15分。

（1）当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)=-\frac{3}{4}\ln x+\sqrt{1+x}, x>0$.

$$f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}},$$

所以，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为（0，3），单调递增区间为（3，+∞）.

（2）由 $f(1)\leq\frac{1}{2a}$，得 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，$f(x)\leq\frac{\sqrt{x}}{2a}$ 等价于 $\frac{\sqrt{x}}{a^2}-\frac{2\sqrt{1+x}}{a}-2\ln x\geq 0$.

令$t=\dfrac{1}{a}$，则$t\ge 2\sqrt{2}$．

设$g(t)=t^2\sqrt{x}-2t\sqrt{1+x}-2\ln x, t\ge 2\sqrt{2}$，

则$g(t)=\sqrt{x}(t-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}})^2-\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}-2\ln x$．

（i）当$x\in\left[\dfrac{1}{7},+\infty\right)$时，$\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\le 2\sqrt{2}$，则

$g(t)\ge g(2\sqrt{2})=8\sqrt{x}-4\sqrt{2}\sqrt{1+x}-2\ln x$．

记$p(x)=4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{1+x}-\ln x, x\ge\dfrac{1}{7}$，则

$$p'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}=\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{(x-1)[1+\sqrt{x}(\sqrt{2x+2}-1)]}{x\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}$$．

故

x	$\dfrac{1}{7}$	$(\dfrac{1}{7},1)$	1	$(1,+\infty)$
$p'(x)$		−	0	+
$p(x)$	$p(\dfrac{1}{7})$	单调递减	极小值$p(1)$	单调递增

所以，$p(x)\ge p(1)=0$．

因此，$g(t)\ge g(2\sqrt{2})=2p(x)\ge 0$．

（ii）当$x\in\left[\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{7}\right)$时，$g(t)\geqslant g\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\dfrac{-2\sqrt{x}\ln x-(x+1)}{2\sqrt{x}}$．

令 $q(x)=2\sqrt{x}\ln x+(x+1), x\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right]$，则 $q'(x)=\frac{\ln x+2}{\sqrt{x}}+1>0$，

故 $q(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right]$ 上单调递增，所以 $q(x)\leqslant q\left(\frac{1}{7}\right)$.

由（i）得，$q\left(\frac{1}{7}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{7}p\left(\frac{1}{7}\right)<-\frac{2\sqrt{7}}{7}p(1)=0$.

所以，$q(x)<0$.

因此 $g(t)\geqslant g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=-\frac{q(x)}{2\sqrt{x}}>0$.

由（i）（ii）知对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$，$t\in[2\sqrt{2},+\infty), g(t)\geqslant 0$，

即对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$，均有 $f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$.

综上所述，所求 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

2019年上海市高考数学试卷

2019.06.07

一. 填空题（本大题共12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

1. 已知集合 $A=(-\infty,3)$，$B=(2,+\infty)$，则 $A\bigcap B=$________

2. 已知 $z\in\mathbf{C}$，且满足 $\dfrac{1}{z-5}=\mathrm{i}$，求 $z=$________

3. 已知向量 $\vec{a}=(1,0,2)$，$\vec{b}=(2,1,0)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为________

4. 已知二项式 $(2x+1)^5$，则展开式中含 x^2 项的系数为________

5. 已知 x、y 满足 $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\le 2 \end{cases}$，求 $z=2x-3y$ 的最小值为________

6. 已知函数 $f(x)$ 周期为1，且当 $0<x\le 1$，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(\dfrac{3}{2})=$________

7. 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $\dfrac{1}{x}+2y=3$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为________

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n+a_n=2$，则 $S_5=$________

9. 过曲线 $y^2=4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与曲线 $y^2=4x$ 交于 A、B，A 在 B 上方，M 为抛物线上一点，$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(\lambda-2)\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda=$________

10. 某三位数密码，每位数字可在 $0-9$ 这10个数字中任选一个，则该三位数密码中，恰有两位数字相同的概率是______

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n<a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），若 $P_n(n,a_n)$ $(n\ge 3)$ 均在双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|P_nP_{n+1}|=$________

12. 已知 $f(x)=|\dfrac{2}{x-1}-a|$（$x>1$，$a>0$），$f(x)$ 与 x 轴交点为 A，若对于 $f(x)$ 图像上任意一点 P，在其图像上总存在另一点 Q（P、Q 异于 A），满足 $AP\perp AQ$，且

$|AP|=|AQ|$，则 $a=$________

二. 选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13. 已知直线方程 $2x-y+c=0$ 的一个方向向量 $\vec{d}$ 可以是（　　）

A. $(2,-1)$　　B. $(2,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(1,2)$

14. 一个直角三角形的两条直角边长分别为 1 和 2，将该三角形分别绕其两个直角边旋转得到的两个圆锥的体积之比为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

15. 已知 $\omega\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=(x-6)^2\cdot\sin(\omega x)$，存在常数 $a\in\mathbf{R}$，使得 $f(x+a)$ 为偶函数，

则 ω 的值可能为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{5}$

16. 已知 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)$，有下列两个结论：① 存在 α 在第一象限，β 在第三象限；② 存在 α 在第二象限，β 在第四象限；则（　　）

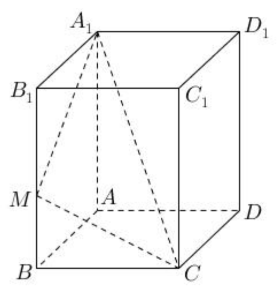
A. ①②均正确　　B. ①②均错误　　C. ①对②错　　D. ①错②对

三. 解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 BB_1 上一点，已知 $BM=2$，$CD=3$，$AD=4$，$AA_1=5$.

（1）求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角；

（2）求点 A 到平面 A_1MC 的距离.

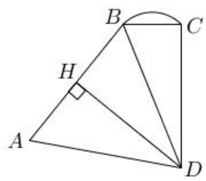


18. 已知 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+1}$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)+1<f(x+1)$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 时有零点，求 a 的取值范围.

19. 如图，$A-B-C$ 为海岸线，AB 为线段，$\overset{\frown}{BC}$ 为四分之一圆弧，$BD=39.2\,\text{km}$，$\angle BDC=22^{\circ}$，$\angle CBD=68^{\circ}$，$\angle BDA=58^{\circ}$.



（1）求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度；

（2）若 $AB=40\,\text{km}$，求 D 到海岸线 $A-B-C$ 的最短距离.

（精确到 0.001km）

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$F_1$、$F_2$ 为左、右焦点，直线 l 过 F_2 交椭圆于 A、B 两点.

（1）若直线 l 垂直于 x 轴，求 $|AB|$；

（2）当 $\angle F_1AB=90^{\circ}$ 时，A 在 x 轴上方时，求 A、B 的坐标；

（3）若直线 AF_1 交 y 轴于 M，直线 BF_1 交 y 轴于 N，是否存在直线 l，使得 $S_{\triangle F_1AB}=S_{\triangle F_1MN}$，

若存在，求出直线 l 的方程，若不存在，请说明理由.

21. 数列$\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$有 100 项，$a_1=a$，对任意$n\in[2,100]$，存在$a_n=a_i+d$，$i\in[1,n-1]$，若a_k与前 n 项中某一项相等，则称a_k具有性质 P.

（1）若$a_1=1$，$d=2$，求a_4所有可能的值；

（2）若$\{a_n\}$不是等差数列，求证：数列$\{a_n\}$中存在某些项具有性质 P；

（3）若$\{a_n\}$中恰有三项具有性质 P，这三项和为 c，请用 a、d、c 表示$a_1+a_2+\cdots+a_{100}$.

上海高考卷参考答案

一. 填空题

1. $(2,3)$

2. $5-\mathrm{i}$，$z=\frac{1}{\mathrm{i}}+5=5-\mathrm{i}$

3. $\arccos\frac{2}{5}$，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$

4. 40，x^2的系数为$C_5^3\cdot 2^2=40$

5. -6，线性规划作图，后求出边界点代入求最值，当$x=0$，$y=2$时，$z_{\min}=-6$

6. -1，$f(\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})=\log_2\frac{1}{2}=-1$

7. $\frac{9}{8}$，法一：$3=\frac{1}{x}+2y\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 2y}$，$\therefore \frac{y}{x}\leq(\frac{3}{2\sqrt{2}})^2=\frac{9}{8}$；

法二：由$\frac{1}{x}=3-2y$，$\frac{y}{x}=(3-2y)\cdot y=-2y^2+3y$（$0<y<\frac{3}{2}$），求二次最值$(\frac{y}{x})_{\max}=\frac{9}{8}$

8. $\frac{31}{16}$，由$\begin{cases}S_n+a_n=2\\S_{n-1}+a_{n-1}=2(n\geq 2)\end{cases}$得：$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$（$n\geq 2$），$\therefore\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=1$，

$q=\frac{1}{2}$，$\therefore S_5=\frac{1\cdot[1-(\frac{1}{2})^5]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$

9. 3，依题意求得：$A(1,2)$，$B(1,-2)$，设M坐标为$M(x,y)$，

有：$(x,y)=\lambda(1,2)+(\lambda-2)\cdot(1,-2)=(2\lambda-2,4)$，带入$y^2=4x$有：$16=4\cdot(2\lambda-2)$，

即$\lambda=3$

10. $\frac{27}{100}$，法一：$P=\frac{C_{10}^1\cdot C_3^2\cdot C_9^1}{10^3}=\frac{27}{100}$（分子含义：选相同数字×选位置×选第三个数字）；

法二：$P=1-\frac{C_{10}^1+P_{10}^3}{10^3}=\frac{27}{100}$（分子含义：三位数字都相同+三位数字都不同）

11. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，法一：由 $\dfrac{n^2}{8}-\dfrac{a_n^2}{2}=1$ 得：$a_n=\sqrt{2(\dfrac{n^2}{6}-1)}$，$\therefore P_n(n,\sqrt{2(\dfrac{n^2}{6}-1)})$，$P_{n+1}(n+1,\sqrt{2(\dfrac{(n+1)^2}{6}-1)})$，利用两点间距离公式求解极限：$\lim\limits_{n\to\infty}|P_nP_{n+1}|=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$；

法二（极限法）：当 $n\to\infty$ 时，P_nP_{n+1} 与渐近线平行，P_nP_{n+1} 在 x 轴投影为 1，渐近线斜角 θ 满足：$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore P_nP_{n+1}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

12. $a=\sqrt{2}$

二. 选择题

13. 选 D，依题意：$(2,-1)$ 为直线的一个法向量，$\therefore$ 方向向量为 $(1,2)$

14. 选 B，依题意：$V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 1=\dfrac{4}{3}\pi$，$V_2=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 2=\dfrac{2}{3}\pi$

15. 选 C，法一：依次代入选项的值，检验 $f(x+a)$ 的奇偶性；

法二：$f(x+a)=(x+a-6)^2\cdot\sin[\omega(x+a)]$，若 $f(x+a)$ 为偶函数，则 $a=6$，且

$\sin[\omega(x+6)]$ 也为偶函数（偶函数×偶函数=偶函数），$\therefore 6\omega=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，当 $k=1$ 时，$\omega=\dfrac{\pi}{4}$

16. 选 D，取特殊值检验法：例如：令 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 和 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$，求 $\tan\beta$ 是否存在（考试中，若有解时则认为存在，取多组解时发现没有解，则可认为不存在）

三. 解答题

17.（1）$\dfrac{\pi}{4}$；（2）$\dfrac{10}{3}$.

18.（1）$x\in(-2,-1)$；（2）$a\in[-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6}]$.

19.（1）$\overset{\frown}{BC}=\dfrac{\pi}{2}R=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\cdot BD\cdot\sin 22^\circ\approx 16.310$ km；（2）35.752km.

20.（1）$2\sqrt{2}$；（2）$A(0,2)$，$B(\dfrac{8}{3},-\dfrac{2}{3})$；（3）$x\pm\sqrt{3}y-2=0$.

21.（1）3、5、7；（2）略；（3）$97a+4656d+c$.