年级________ 姓名________ 班级________ 学校________

装 订 线

2019 年浙江省数学夏令营测试卷

题　号	一	9	10	11	12	总分
得　分						
评阅人						

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 若$\sin x+\sin y=\dfrac{\sqrt{6}-1}{2},\cos x+\cos y=\dfrac{\sqrt{6}+1}{2}$，则$\cos(x+y)=$____________。

2. 以四个点$(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$为顶点的四面体的内切球半径为________。

3. 已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},$，对于任意实数t有$|\vec{b}-t\vec{a}|\geq|\vec{b}-\vec{a}|,|\vec{b}-t\vec{c}|\geq|\vec{b}-\vec{c}|$，且$|\vec{a}|=1\,1,|\vec{c}|=2,|\vec{c}-\vec{a}|=\sqrt{7}$，则$|\vec{b}|=$____________。

4. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{6-a_n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{2020}\dfrac{1}{a_n}=$_______________。

5. 四边形$ABCD$的各个顶点依次位于抛物线$y=x^2$上，$\angle BAD=60^\circ$，对角线AC平行x轴，且AC平分$\angle BAD$。若对角线$BD=\sqrt{2}$，则四边形$ABCD$的面积为_____________。

6. 某城市发放汽车牌照，每个牌照由 6 位数组成。若要求任意两个牌照对应位置的数字至少有两位不相同，则最多可发放牌照_________________个。

7. 设$x,y\in\mathbb{R}$，且满足$\begin{cases}5x(1+\dfrac{1}{x^2+y^2})=12,\\ 5y(1-\dfrac{1}{x^2+y^2})=4,\end{cases}$ 则$x+y=$____________________。

8. 设$S=\{1,2,3,4,5\}$，集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$是S的n个不同的非空子集，且满足$A_k\cap A_{k+1}=\varnothing,\ A_k\cup A_{k+1}\neq S,k=1,2,\cdots,n-1$，则$n$的最大值为_____________。

二、解答题（本大题共 3 小题，第 9 题 16 分，其他每小题 20 分，共 56 分）

9. （本题 16 分）已知$a,b,c,d\in\mathbb{R}, f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，且$f(2019-i)=i$ $(i=1,2,3,4)$，求$8a+4b+2c+d$的值。

10. （本题 20 分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，过两个焦点分别作两条相互垂直的直线$l_1,l_2$。假设两条直线$l_1,l_2$相交于$P$，$l_1,l_2$在椭圆内所截的线段长度为$m_1,m_2$。

（1）点P在椭圆内时，求a,b 应满足的条件；

（2）求m_1m_2 的最小值和最大值。

11. （本题 20 分）设$a_1=\dfrac{1}{3},a_i>0(2\le i\le n)$，证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{(k+1)(2k+1)(a_1^2+\cdots+a_k^2)}<1$。

三、附加题（本题 30）

12. 设A为$20!$的所有因数构成的集合，$x_i\in A(1\le i\le n)$。若对任意的正整数$y_i(1\le i\le n)$，存在正整数z，使得$\dfrac{y_i+z}{x_i}$为正整数。

（1）求n的最大值；

（2）在（1）情况下求所有可能的n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的组数。

参考答案

1. $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$　　**2.** $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$　　**3.** 14　　**4.** $505+\dfrac{3^{2020}-1}{24}$

5. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　**6.** 100000　　**7.** 3或$\dfrac{1}{5}$　　**8.** 20

9. 令$g(x)=f(x)-(2019-x)$，由已知可得

$$g(2019-i)=f(2019-i)-2019+(2019-i)=0$$

即$2019-i(i=1,2,3,4)$为方程$g(x)=0$的根，令

$$g(x)=f(x)-(2019-x)=c(x)(x-2018)(x-2017)(x-2016)(x-2015)\cdots（1）$$

（1）式左边是三次，右边高于三次，所以$c(x)=0$，因此 $f(x)=2019-x$。

所以$8a+4b+2c+d = f(2)=2017$。

10. 解答 （1）因为P 点在以原点为圆心，以焦半径为半径的圆上，所以要使点P 在椭圆内，则$c<b$，即$a^2-b^2<b^2$，即$a<\sqrt{2}b$。

（2）设l_1的斜率为k，则l_1的直线方程为$y=k(x-c)$，联立椭圆方程，求得

$$m_1=\frac{2ab^2(1+k^2)}{a^2k^2+b^2}$$

同理求得$m_2=\dfrac{2ab^2(1+k^2)}{a^2+b^2k^2}$

$$m_1m_2=\frac{4a^2b^4(1+k^2)^2}{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)}=\frac{4a^2b^4(2+k^2+\frac{1}{k^2})}{a^2b^2(k^2+\frac{1}{k^2})+a^4+b^4}$$，令$t=k^2+\dfrac{1}{k^2}+2\geq 4$，则

$$m_1m_2=\frac{4a^2b^4}{a^2b^2+\frac{1}{t}(a^4+b^4-2ab)}\geq\frac{16a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

所以m_1m_2的最小值为$\dfrac{16a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}$；

当t趋向无穷时，即其中一条直线与x轴垂直，另一直线与x周重合时，m_1m_2取最大值为$4b^2$。

11. 证明 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(2k+1)(a_1^2+\cdots+a_k^2)}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}(a_1^2+\cdots+a_k^2)}$$

$$\leq\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{(a_1+2a_2\cdots+ka_k)^2}=\frac{1}{6}(\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{ka_k}{(a_1+2a_2\cdots+ka_k)^2})$$

$$\leq\frac{1}{6}[\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{a_1+2a_2\cdots+(k-1)a_{k-1}}-\frac{1}{a_1+2a_2\cdots+ka_k})]$$

$$=\frac{1}{6}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+2a_2\cdots+na_n})<\frac{1}{6}\bullet\frac{2}{a_2}=1$$

12. 解 （1）$20!=2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11\times13\times17\times19, A=\{x\,|\,x|20!, x\in\mathbb{N}_+\}$.

令$(x_i,x_j)=d(x_i,x_j\in A)$， $x_i=ad,x_j=bd,$且$(a,b)=1$。

取$y_1=1,y_2=2$，得$\frac{1+z}{ad},\frac{2+z}{bd}\in\mathbb{Z}$，于是$d=1$，于是$(x_i,x_j)=1(1\le i\ne j\le n)$。

做方程组

$$\begin{cases} z\equiv -y_1(\bmod x_1) \\ z\equiv -y_2(\bmod x_2) \\ \cdots\cdots \\ z\equiv -y_n(\bmod x_n) \end{cases}$$

由中国剩余定理可知存在正整数z使得$\frac{y_i+z}{x_i}$为整数。

又集合A有 8 个不同的质因数，其中可以有一个变量取 1，故$n\le 9$；当$n\ge 10$时，

一定存在x_i,x_j，$(x_i,x_j)>1$。

当$n=9$时，取$x_1=1,\{x_2,\cdots,x_9\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$。所以$n$的最大值为 9。

（2）$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的组数为$18\times 8\times 4\times 2\times 9!$。