用好必要条件 优化解题策略

314300 浙江省海盐元济高级中学 窦青伟 卢 明

一、问题的提出

寻求“最优化”的解题策略是数学教学的一个重要目标.可是,现实中“小题大做”、“大题繁做”的案例比比皆是.因此,经常性地对解题策略进行研讨,避免“小题大做”,甚至实现“大题小做”,应该成为数学教学研究的一个永恒主题.

1.“必要条件”的概述

给出命题:“若 P,则 q”.如果能够由 q 成立推出 p 成立,则称 p 是 q 的必要条件.例如:命题 p:$x\in\mathbf{R}$ 且 $x>1$,命题 q:$x\in\mathbf{R}$ 且 $x>2$.显然,由“$x>2$”成立可以推出“$x>1$”成立,故 p 是 q 的一个必要条件.用集合的观点看,$p\supseteq q$.也可以理解成 q 是 p 的一种特例.

2.“必要条件”在解题中的价值

如图 1,已知 O、A、B 是平面上不共线的三点,P 是线段 AB 垂直平分线上的任意一点,且 $|\overrightarrow{OA}|=3$,$|\overrightarrow{OB}|=2$,则 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=$_____.

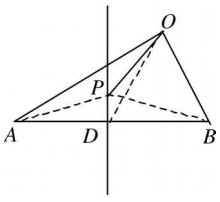

图 1

通常的解法是:连结 PA、PB.因为 P 在线段 AB 垂直平分线上,所以,$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$.$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{PA})\cdot\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{OB}=9-|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle OAP-4+|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\angle OBP=5-3|\overrightarrow{PA}|\cdot\frac{|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OP}|^2}{2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{PA}|}+2|\overrightarrow{PB}|\cdot\frac{|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OP}|^2}{2|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=5-\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}|^2-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{PB}|^2+2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{5}{2}$.

以上解法工程浩大,用到的知识点有:线段垂直平分线的性质、向量的数量积、余弦定理等,最困难的一点是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的转化,需要一定的预见性和技巧.

本题是一个填空题,解题过程无需“小题大做”.注意到 P 是线段 AB 垂直平分线上的任意一点,而所求的向量数量积却是一个定值,不难猜想 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ 的值应该与 P 点的位置无关.这就启发我们可以从某个特定位置入手去求解.如选择 AB 的中点 D,连接 OD(如图 1 所示).在此,“P 点处 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ 的值等于 D 点处 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ 的值”是命题的一个“必要条件”.从而可得新解法:$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OD}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2)=\frac{5}{2}$.

第二种解法成功地避免了“小题大做”,解题过程非常简约.由此可见,如何用好“必要条件”,对于优化解题策略有着十分重要的作用.不仅填空题、选择题可以这样思考,许多解答题

但 $\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}=\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{y+z}}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{z+x}}$(5),由(4)(5)易知,所证的不等式成立,转化为求证 $\frac{x^2y}{(x+y)(z+x)}+\frac{y^2z}{(y+z)(x+y)}+\frac{z^2x}{(z+x)(y+z)}\leqslant\frac{1}{4}$(6),由分析法可证(6)成立(后略).

参考文献

[1] 徐智愚.一个空间的推广定理在立几竞赛题中的应用[J].福建中学数学,1994,4.
[2] 曾建国.一个“数学问题”的简解与推广[J].数学通报,2006,12.
[3] 徐智愚.用导数解初等数学题[J].数学通报,2000,10.
[4] 邓继业.数学解题中优化假设举例[J].数学通报,2000,10.
[5] 黄俊峰,袁方程.用向量法解最值问题[J].上海中学数学,2007,12.
[6] 安振平.用导数知识探究数学问题[J].中学数学教学参考,2007,12.
[7] 徐智愚.“函数单调性”在不等式竞赛题中的妙用[J].上海中学数学,2008,4.
[8] 徐智愚.“似 Radon 不等式”在不等式中的应用——兼谈纠正两个有错误的证明[J].上海中学数学,2008,6.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cn

也可以作同样处理.

二、典例剖析

在高中数学中,很多题目在题干中隐含着对某个问题的“必要条件”,假如能够以此入手进行思考,可以产生由“点”及“面”、从“特殊”到“一般”的奇特效果,优化解题过程.

例 **1** 设 $f(x)=\frac{x^2+mx+10}{x-3}$,已知 $x=1$ 是 $f(x)$的一个极值点.

(1) 求 m 的值及 $f(x)$的单调区间;

(2) $g(x)=x^3-2a^2x+a^3-4$,若存在实数 a,使得 $\forall x_1\in[0,t]$, $\exists x_2\in[0,2]$,有 $g(x_1)=f(x_2)$,求最大正实数 t 的值.

解析:(1)因为函数 $f(x)$在点 x_0 处有极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$,故由 $f'(1)=0$,解得 $m=-5$.进而容易求得 $f(x)$的单调区间.(略)

(2)根据题意,不难看出函数 $g(x)$在$[0,t]$上的值域是函数 $f(x)$在$[0,2]$上的值域的子集;因为 $f(x)=\frac{x^2-5x+10}{x-3}$在 $x\in[0,2]$上的值域为$[-4,-3]$,所以,$g(x)$在$[0,t]$上的值域是$[-4,-3]$的子集.

若按常规思路解,即先用参数 a,t 来表示出 $g(x)$的值域,再利用限制条件求出 t 的最大值.由于函数解析式中含有参数 a,所以函数是不定的,加上区间端点含有参数 t,故区间也为动区间,因此需要对 a 与 t 进行复杂的讨论,解答十分繁琐.

利用“必要条件”来求解.

当 $x\in[0,t]$ 时,$g(x)$的值域为$[-4,-3]$的子集的必要条件是:$g(0)\in[-4,-3]$,即$-4\leqslant a^3-4\leqslant-3$,解得 $0\leqslant a\leqslant1$.这样立刻缩小了 a 的范围,为下面的解答提供了方便.

1° 当 $a=0$ 时,$g(x)=x^3-4$ 在$[0,t]$上单调递增,其值域为$[-4,t^3-4]\in[-4,-3]$,从而解得 t 的最大值为 1.

2° 当 $0<a\leqslant1$ 时,$g'(x)=3x^2-2a^2=3(x+\frac{\sqrt{6}}{3}a)(x-\frac{\sqrt{6}}{3}a)$.

继续从“必要条件”入手.如果$\frac{\sqrt{6}}{3}a\in[0,t]$,则必有 $g(\frac{\sqrt{6}}{3}a)\in[-4,-3]$.可是 $g(\frac{\sqrt{6}}{3}a)=a^3(1-\frac{4\sqrt{6}}{9})-4<-4$,所以只要 $g(t)\geqslant-4$,解得 $0<t\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

综上所述,当 $a=0$ 时,$t_{\max}=1$;当 $0<a\leqslant1$ 时,$t_{\max}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

解题回顾:

本题先后两次使用题目中隐含的“必要条件”,其中第一次是缩小参数 a 的取值范围,使分类讨论更加简捷.另一启发是使用“必要条件”求解的解题策略在同一题中可以多次使用.

例 **2** 已知函数 $f(x)=(1-2a)x^3+(9a-4)x^2+(5-12a)x+4a(a\in\mathbf{R})$.若函数 $f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为 2,求 a 的取值范围.

解析:

寻求题目的“必要条件”:$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为 2 的必要条件是$\begin{cases}f(0)\leqslant2\\f(2)\leqslant2\end{cases}$,即:$f(0)=4a\leqslant2$ 且 $f(2)=2\leqslant2$.所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$,且当 $x=2$ 时,恰好取到了函数的最大值 2.于是问题可转化为 $f(x)\leqslant2$ 对 $\forall x\in[0,2]$ 恒成立,即$(1-2a)x^3+(9a-4)x^2+(5-12a)x+4a\leqslant2$ 对 $\forall x\in[0,2]$ 恒成立.

整理得$(x-1)^2(x-2)\leqslant a(x-2)^2(2x-1)$.当 $x=2$ 和 $x=\frac{1}{2}$时,上式恒成立;当 $x\in[0.2)$时,上式可化为$(x-1)^2\geqslant a(x-2)(2x-1)$.等价于①$0\leqslant x<\frac{1}{2}$时,$a\leqslant\frac{(x-1)^2}{(x-2)(2x-1)}$恒成立;②$\frac{1}{2}<x<2$ 时,$a\geqslant\frac{(x-1)^2}{(x-2)(2x-1)}$恒成立;令 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{(x-2)(2x-1)}$,则 $g'(x)=\frac{1-x^2}{(2x^2-5x+2)^2}$.所以,函数 $g(x)$在$[0,\frac{1}{2})$上为增函数,在$(\frac{1}{2},1]$上为增函数,在$(1,2)$上为减函数.则 $x\in[0,\frac{1}{2})$时,$g(x)_{\min}=g(0)=\frac{1}{2}$,所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.$x\in(\frac{1}{2},2)$时,$g(x)_{\max}=g(1)=0$,所以 $a\geqslant0$.综上所述,满足条件的 $a\in[0,\frac{1}{2}]$.

解题回顾:

通过以上两例,可以感受到使用“必要条件”的首要目的是缩小参变量 a 的取值范围,方便讨论;至于例 2,在“必要条件”的应用过程中遇到 $f(2)=2$,恰好是函数在区间$[0,2]$的最大值,这是一种巧合,是命题者的精巧构思,如果没有对“必要条件”的思考,则很难发现这种构思,从而也难以站到命题者的思维高度去寻找

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cn

有效的解题策略.

例 3 (2009 年宁夏海南卷文科)已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2-9a^2x+a^3$.

(1)设 $a=1$, 求函数 $f(x)$的极值;

(2)若 $a>\frac{1}{4}$, 且当 $x\in[1,4a]$ 时, $|f'(x)|\leqslant 12a$ 恒成立, 试确定 a 的取值范围.

解析: (1)(略);

(2)此题中的"必要条件"是什么?"若 $a>\frac{1}{4}$, 且当 $x\in[1,4a]$ 时, $|f'(x)|\leqslant 12a$ 恒成立". 这就说明, 当 $x=1$ 时, $|f'(1)|=|3-6a-9a^2|\leqslant 12a$ 恒成立.

所以有 $\begin{cases}3a^2-2a-1\leqslant 0\\ 3a^2+6a-1\geqslant 0\\ a>\frac{1}{4}\end{cases}$, 解得 $\frac{1}{4}<a\leqslant 1$.

因为 $f'(x)=3x^2-6ax-9a^2$ 的图像是一条开口向上的抛物线, 其对称轴为 $x=a$ 且 $\frac{1}{4}<a\leqslant 1$, 所以 $f'(x)$在$[1,4a]$ 上是增函数. 于是, $[f'(x)]_{\min}=f'(1)=3-6a-9a^2\geqslant -12a$, 得 $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$; $[f'(x)]_{\max}=f'(4a)=15a^2\leqslant 12a$, 得 $0\leqslant a\leqslant\frac{4}{5}$; 故满足条件的 $a\in(\frac{1}{4},\frac{4}{5}]$.

解题回顾:

本题第二问是一个"恒成立"问题, 从逻辑上讲, 既然对任意 $x\in[1,4a]$ 恒成立, 则对于某个 $x_0\in[1,4a]$ 也成立, 以此为"必要条件"将一般问题特殊化处理. 利用"必要条件"解题, 这种解题思想不仅在函数问题中有广泛的应用, 在其它模块的题型中也有很多应用.

例 4 (2009 年山东卷理科)设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$过 $M(2,\sqrt{2})$, $N(\sqrt{6},1)$两点, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A、B, 且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$? 若存在, 写出该圆的方程, 并求 $|AB|$ 的取值范围, 若不存在说明理由.

解析:

(1) 易得椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 根据题意, 若存在满足条件的圆, 则圆必在椭圆内, 即圆的半径 $r<2$(如图 2); 本题的一个"必要条件"是圆 O 的切线 $AB\perp x$ 轴时, 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ x=r\end{cases}$ 得 $y^2=4-\frac{r^2}{2}$. 所以, $r^2=4-\frac{r^2}{2}$, 解得 $r^2=\frac{8}{3}$.

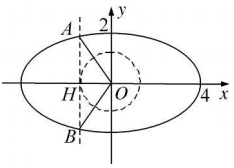

图 2

由必要条件可得, 若存在圆满足条件, 则这个圆方程一定是圆 O: $x^2+y^2=\frac{8}{3}$. 设 $M(m,n)$ $(n\neq 0)$($n=0$ 时已成立)为圆 O 上的任意一点, 则点 M 处的圆 O 的切线 AB 方程为: $mx+ny=\frac{8}{3}$, 即 $y=-\frac{m}{n}x+\frac{8}{3n}$. 则由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=-\frac{m}{n}x+\frac{8}{3n}\end{cases}$ 得 $(9n^2+18m^2)x^2-96mx+128-27n^2=0$. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{96m}{9n^2+18m^2}$, $x_1x_2=\frac{128-72n^2}{9n^2+18m^2}$. 于是, $x_1x_2+y_1y_2=\frac{8}{9n^2}[3x_1x_2-3m(x_1+x_2)+8]=0$, 所以, $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$成立. 故存在圆 O: $x^2+y^2=\frac{8}{3}$ 满足要求. 又 $\triangle AOB$ 为直角三角形, 所以, $\frac{8}{3}|AB|^2=|OA|^2\cdot|OB|^2$, 则 $\frac{8}{3}|AB|^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=(\frac{x_1^2}{2}+4)(\frac{x_2^2}{2}+4)=\frac{x_1^2x_2^2}{4}+2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$.

(1) 当直线 AB 斜率存在时, 将 x_1+x_2、x_1x_2 代入化简可得: $\frac{8}{3}|AB|^2=16\times 128\times\frac{9m^2+8}{81m^4+432m^2+576}=16\times 128\times\frac{1}{9m^2+8+\frac{256}{9m^2+8}+32}$ (※). 因为 $0\leqslant m^2<\frac{8}{3}$, 所以 $8\leqslant 9m^2+8<32$, 所以 $32\leqslant 9m^2+8+\frac{256}{9m^2+8}\leqslant 40$. 于是, $\frac{256}{9}\leqslant\frac{8}{3}|AB|^2\leqslant 32$, 即 $\frac{4\sqrt{6}}{3}\leqslant|AB|\leqslant 2\sqrt{3}$.

(2)当直线 AB 斜率不存在时, 易得 $|AB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cn

隐含条件“隐”在何处

324000　浙江省衢州第二中学　叶勇贵

学生答错题的原因多种多样，有知识掌握不牢固、论证不严密、解题方法选择不当等. 此外，也有心理因素和偶然因素. 知识性错误是指对试题涉及到的有关知识不能正确理解，或运用不当，因此不能正确陈述解题过程和结论而导致的错误. 学生在解题时，注意力集中在某些条件而经常忽视题目的隐含条件导致解题错误，这是知识性错误中常见的一种. 那么隐含条件究竟“隐”在哪里？

1. 有关三角形的问题

三角形中“任意两边之和大于第三边”是任何三角形都应满足的条件，但也是学生容易忽视的.

例**1**　$\triangle ABC$的三边长a、b、c满足$b+c\leqslant 2a$，$a+c\leqslant 2b$. 则$\frac{b}{a}$的取值范围是(　　).

(A)$(\frac{1}{2},2)$　(B)$(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2})$

(C)$(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$　(D)$(0,2)$

错解：由条件知c最小(否则若$b<c\leqslant a$或$b<a\leqslant c$均有$a+c>2b$矛盾. 若$a<c\leqslant b$或$a<b\leqslant c$均有$b+c\geqslant 2a$，与已知矛盾). 由$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\leqslant 2$及$1+\frac{c}{a}\leqslant 2\cdot\frac{b}{a}$，有$\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 2-\frac{c}{a}$. 因$c$最小，可令$c\to 0$得$\frac{1}{2}<\frac{b}{a}<2$.

取$a=7$，$b=4$，$c=1$时，容易验证符合题目给出的两个条件$b+c\leqslant 2a$，$a+c\leqslant 2b$，但这时三条线段就根本无法构成三角形，所以$\frac{b}{a}\neq\frac{4}{7}$. 这样可以排除(A)、(B)、(D)而选(C)，上述解法错误. 因以上解法仅仅考虑了题目明显给出的两个条件而忽视了三角形三边关系，理由显然是不充分的. 本题应根据题目的条件结合三角形三边的关系，可如下求解：

$a<b+c\leqslant 2a$，则可得$1-\frac{c}{a}<\frac{b}{a}\leqslant 2-\frac{c}{a}$(1)，$b<a+c\leqslant 2b$，则可得$\frac{b}{a}-1<\frac{c}{a}\leqslant\frac{2b}{a}-1$，得$1-\frac{2b}{a}\leqslant-\frac{c}{a}<1-\frac{b}{a}$　(2)，由(1)、(2)得$2-\frac{2b}{a}<\frac{b}{a}$即$\frac{b}{a}>\frac{2}{3}$，且$\frac{b}{a}<3-\frac{b}{a}$即$\frac{b}{a}<\frac{3}{2}$，所以$\frac{2}{3}<\frac{b}{a}<\frac{3}{2}$.

2. 对数问题

对数的真数大于零，底数大于零且不等于1是学生经常忘记考虑的条件.

例**2**　设$A=\{y\mid y^2-6y+8<0\}$，$B=\{y\mid y^2-8ay+(16a^2-1)<0\}$，且$A=B$，则不等式$\log_a(x^2-3x-4)<\log_a(2x^2+7x+5)$的解集是(　　).

(A)$\{x\mid -9<x<-1\}$

综上所述，$|AB|$的取值范围是$[\frac{4\sqrt{6}}{3},2\sqrt{3}]$.

解题回顾：

本题使用“必要条件”能够迅速确定圆的方程，使问题变得一目了然.

三、问题与探讨

巧用“必要条件”既然作为一种解题策略，就有必要探讨其适用性. 从逻辑上讲，应用“必要条件”解题，其核心思想可以理解为“对整体成立，对局部或者个例一定成立”，“对一般成立，对特殊一定成立”. 这种思想与用“特殊值法”解题异曲同工.

于是，对于命题中出现“最值”、“任意”、“恒定成立”等字样的命题，往往从“必要条件”入手进行思考，可以化难为易，事半功倍. 而此类命题在新课程背景下，作为检测学生的创新意识和创新能力的一种工具，颇受广大命题专家的青睐，必须予以重视，并养成自觉使用“必要条件”的意识与习惯，优化解题策略，提升思维品质.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cn