

# 中国古代最伟大的数学家刘徽

——为纪念刘徽注《九章算术》1750周年而作

郭书春

中国古代最伟大的数学家不是祖冲之吗？怎么会是刘徽呢？祖冲之（429-500）确实是伟大的数学家，应该说，他的数学水平不会低于刘徽。但是他的数学著作《缀术》（一作《缀述》）由于隋唐最高数学学府算学馆的学官“莫能究其深奥”，因而失传。因此其全部数学贡献人们至今无法了解。我们现在仅知道他的两项确切成就：将圆周率精确到8位有效数字以及与他的儿子祖暅之完成的球体的体积公式的推导。这两项成就都是刘徽为其提出方法或建立理论基础的。从数学的角度而言，这当然比祖冲之的贡献更重要。

中国科学院系统科学研究所于1985年10月举办了现代数学讨论班，要以一位伟大的数学家冠名。许多学者主张称为祖冲之讨论班，吴文俊院士力排众议，主张以刘徽命名。吴先生认为，刘徽无可争议地是我国传统数学中唯一的代表人物。

刘徽以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的算法，建立了中国传统数学

的理论体系。最值得称道的是他在世界数学史上第一次将无穷小分割方法和极限思想用于数学证明。刘徽逻辑之严谨，所达到的高度，在中国古代也无居其右者。可是，在上世纪70年代末以前，中国数学史界对刘徽没有给予应有的重视。其原因主要是刘徽注十分难读，其最重要成就，中国人或者以为弄通了，实际上搞错了，比如割圆术；或者根本没有搞懂，比如刘徽原理；或者没有涉及，比如刘徽关于“率”的理论和刘徽的逻辑思想。加之，它以为《九章算术》作注的形式出现，很容易被误以为依附于《九章算术》，因而导致把刘徽看成是一位二流的数学家。

上世纪70年代末至90年代出现了研究《九章算术》及其刘徽注的高潮，对《九章算术》的编纂和体例，刘徽的主要成就，刘徽的思想，产生刘徽注这样划时代著作的社会背景，以及《九章算术》的版本基本上弄清楚了，对《九章算术》的校勘也有重大进展。

## 《九章算术》——中国传统数学框架的确立

刘徽是为《九章算术》作注而名垂青史的。我们平日所说的《九章算术》有狭义与广义两种涵义。狭义地说，仅指《九章算术》本文。谈成就、编纂、体例等，常用这种涵义。广义地说，还包括魏刘徽注、唐李淳风等注释。谈版本、校勘等常用这种涵义。

## 《九章算术》的体例和编纂

学术界一种流行的看法是把《九章算术》说成一部“一题、一答、一术的应用问题集”，甚至说“概莫能外”。但这是一种似是而非的说法，而且会引起许多误解，往往成为中国古代数学没有理论的根据。但是，只要打开《九章算术》，就会发现这并不符合《九章算术》的实际情况。实际上，《九章算术》的题、答、术的关系相当复杂。下面简要叙述。

《九章算术》大部分内容采用算法统率例题的形式，往往是多题一术或一题一术，甚或多题多术。这里又有不同的情形：(i) 给出一个或几个例题，然后给出一条或几条抽象性术文，而例题中只有题目、答案，没有具体演算的术文。整个方田章、商功章的大部分内容以及粟米、少广、均输、盈不足、勾股章的部分内容，都属于这类情形，共有 73 术，106 道例题。(ii) 先给出抽象的术文，再列出

几个例题；而例题只有题目、答案，亦没有演算细草。商功章的甍等、刍童等 2 术及其 10 道例题便是如此。(iii) 先给出抽象性的总术，再给出若干例题；而例题包含了题目、答案、术文三项，其术文是总术的应用。方程章及粟米、衰分、少广、盈不足章的部分共 7 术 80 个例题是如此。

以上三种情形共 82 术，196 问，约占《九章算术》全书的 80%。我们将之称为算法（术）统率例题的形式。尽管其间的表达方式有差异，却有几个共同特点：术文都非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序；在这里抽象性术文是中心，是主体，题目是作为它的例题出现的，是依附于术文的，而不是相反；这些术文具有构造性、机械化。

另外还有一少部分内容采取应用问题集的形式，往往是一题、一答、一术，共有 50 个题目，都是以题目为中心。尽管计算程序是正确的，但都是应用问题的演算细草。

值得注意的是，《九章算术》的这些体例，在近年发现的秦简《数》、秦简《筭书》、汉简《筭数书》等秦汉数学简牍中全都有。《九章算术》和秦汉数学简牍的内容大多数都是完成于秦和先秦的。因此，这反映了秦和先秦数学的共同特点。

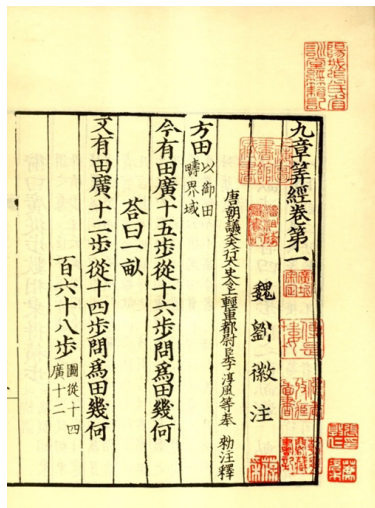


图 1 《九章算术》书影（南宋本）

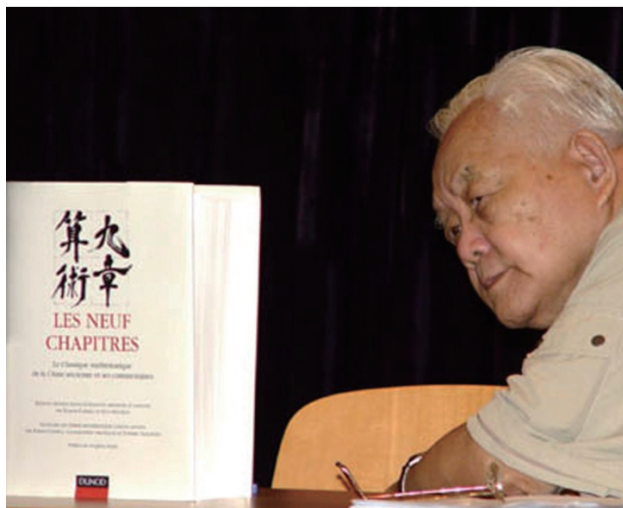


图 2 吴文俊院士在中法对照本《九章算术》的新闻发布会上

很显然，笼统地将《九章算术》称为“一题、一答、一术的应用问题集”是不合适的。笔者认为，数学史上起码存在三种不同体例的著作，一是像欧几里得《几何原本》那样的公理化体系，一是像希腊的丢番图的《算术》、中国的《孙子算经》、《五曹算经》等那样的应用问题集，一是以《九章算术》的主体部分为代表的以算法为中心，算法统率例题的形式。

《九章算术》的体例多种多样，表明它肯定不是一人一时编写的，而是经过许多世代，若干人的劳动积累而成的，这是学术界的共识。然而，到底是什么时候编纂的，却存在不同的看法。现存资料中最早谈到《九章算术》编纂的就是本文所要谈到的刘徽。他说：

周公制礼而有九数，九数之流则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自始厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

事实证明，刘徽关于《九章算术》编纂的论述是最准确的。也就是说，在先秦已经存在某种形式的《九章算术》，它在战乱中遭到破坏。西汉张苍（？-前152年）、耿寿昌（公元前1世纪）搜集遗残，加以删补，编定了《九章算术》。

### 《九章算术》的内容和成就

《九章算术》分九章。第一章方田，刘徽说“以御田畴界域”，解决田地面积问题，给出若干直线形、曲线形的面积的抽象公式。更重要的，提出世界上最早的系统、完整、抽象的分数四则运算法则。第二章粟米，刘徽说“以御交质变易”，解决粟米互换问题。提出十分抽象的“今有术”，即比例算法。此法在后来的印度和西方称为三率法。第三章衰分，刘徽说“以御贵贱禀税”，用“衰分术”、“返衰术”解决比例分配问题。后半章不是衰分问题，而是贸易、取保、贷钱等应用题，应该用今有术求解。第四章少广，刘徽说“以御积幂方圆”，解决面积、体积的逆运算问题。提出了世界上最早的开平方、开立方的抽象程序。第五章商功，刘徽说“以御功程积实”。

此章的本义是解决土方工程中工作量的分配问题，但现今人们更重视其中的若干多面体、圆体的抽象的体积公式。第六章均输，刘徽说“以御远近劳费”，解决赋税中的合理负担问题，是更为复杂的衰分问题。后半章是各种算术难题。第七章盈不足，刘徽说“以御隐杂互见”，解决盈亏类问题，并用盈不足术，通过两次假设解决了若干一般数学问题，在世界数学史上影响巨大。第八章方程，刘徽说“以御错糅正负”。“方程”即现今线性方程组。此章提出了世界上最早的线性方程组解法，“正负术”即正负数加减法则，以及列“方程”的方法“损益”法。第九章勾股，刘徽说“以御高深广远”，提出了抽象的“勾股术”即勾股定理，给出了解勾股形的各种方法和世界上最早的勾股数组通解公式，以及勾股容圆和简单测望等问题。

以上许多成就超前其他文化传统几个世纪甚至上千年。

《九章算术》历来被尊为算经之首，明中叶至清中叶的数学家已经看不到《九章算术》，许多数学著作的标题却都有“九章”或“九数”二字，或以“九数”分类。甚至在西方数学传入之后，还有人将以西方数学为主体的内容按“九数”分类，著书立说。

另一方面，为《九章算术》作注是中国传统数学著作的重要形式，成为中国传统数学成就的重要载体。其中成就最大的是魏刘徽的《九章算术注》，北宋贾宪的《黄帝九章算经细草》。它们分别奠定了魏晋南北朝与宋元两个数学高潮的基础。《九章算术》还传到朝鲜、日本和东南亚，成为这些地区数学知识的源泉。《九章算术》在东方数学中的地位，大体相当于欧几里得《几何原本》在西方数学中的地位。《九章算术》与《几何原本》像两颗璀璨的明珠，在古代东西辉映。

《九章算术》的成书之时，正值古希腊数学越过其高峰，走向衰替之际。《九章算术》的问世标志着中国及后来的印度、阿拉伯地区取代古希腊成为世界数学研究的重心，也标志着世界数学从研究空间形式为主，转变为以研究数量关系为主，标志着数学机械化算法体系取代数学公理化演绎体系成为世界数学发展中的主流。

我们在表彰《九章算术》的成就的同时，不能忽视它的缺点。首先就是《九章算术》没有任何数学定义，也没有任何推导和证明。当然，这并不是说《九章算术》在提出这些算法时没有某种形式的推导。其次，受儒家传统思想的束缚，《九章算术》没有突破“九

数”的限制。这一方面使九章的分类不尽合理，有的按应用分类，有的按数学方法分类，标准不同一。另一方面，对当时提出的许多新问题，编纂者未能与时俱进，打破“九数”的格局，设置新的类别，而是将一些题目硬塞入衰分章和均输章，不伦不类。

### 刘徽及其《九章算术注》《海岛算经》

刘徽生平不详。笔者根据《宋史·算学礼典》及有关史料断定，刘徽的籍贯是淄乡，属今山东邹平县。他自述“徽幼习《九章》，长再详览”。根据《晋书·律历志》、《隋书·律历志》记载，刘徽于魏景元四年（公元263年）撰《九章算术注》，今年恰好是1750周年。国内外的学者在邹平成功举行了国际学术研讨会。

刘徽的思想受何晏（？-249）、嵇康（223-262）、王弼（226-249）等玄学名士的影响较大，甚至有许多语句相类。由此，我们可以推断，刘徽的生年大约与嵇康、王弼相近，或稍晚一些，就是说，刘徽应该生于公元3世纪20年代后期至公元240年之间。换言之，公元263年他完成《九章算术注》时，年仅30岁上下，或更小一点。有的画家将正在注《九章算术》的刘徽画成一位满脸皱纹的

耄耋老人，有悖于魏晋的时代精神和特点。

《九章算术注》原十卷，第十卷“重差”系自撰自注，后来以《海岛算经》为名单行，因第1问是测望一海岛高、远，故名。其宋刻本已亡佚，今传本是清戴震从《永乐大典》辑录出来的，只有9问，且无刘徽自注。刘徽还有《九章重差图》一卷，已佚。

《海岛算经》将以重差术为主的中国测望技术发展得相当完善，在西方测望技术于明末传入中国之前，再无大的突破。图4是测望海岛示意图。刘徽测望海岛的原型可能是泰山。

尽管对刘徽的生平我们知之甚少，但是由于他的《九章算术注》比较完整地保存下来了，因此对他的思想品格，却是明末之前的数学家中我们了解最多的一位。刘徽博览群书，精心研究了墨家、儒家、道家等先



图3 纪念刘徽注《九章算术》1750周年国际学术研讨会主席台

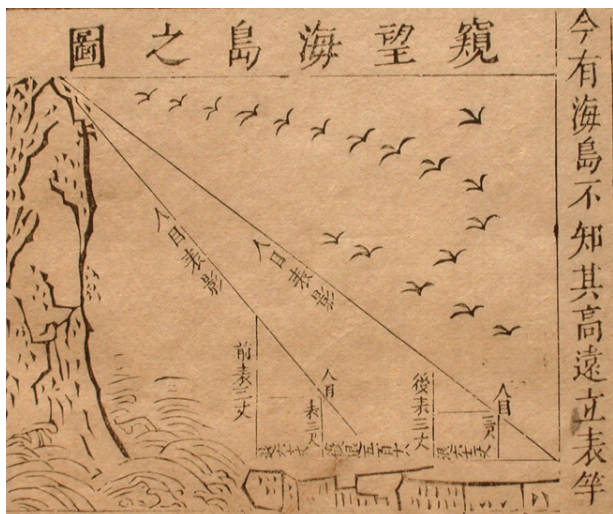


图4 刘徽测望海岛示意图

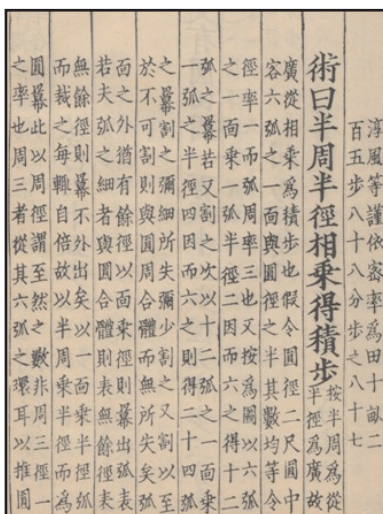


图5 刘徽割圆术书影（南宋本）

秦诸子的著述，以及司马迁、王充、郑玄等两汉学者的著作。他受思想界的正始之音（240-248）和此后的辩难之风的深刻影响，善于从其中及在辩难中泛起的先秦诸子、两汉典籍中汲取大量的思想资料，或者以某些命题作外壳，加以改造，融会贯通，赋予数学内容，得出正确或比较正确的结论，或者撷取其正确部分指导自己的数学研究。他的深邃的思想方法和数学理论蕴含着对传统文化的深刻理解。

坚持实事求是，一切从实际出发，是刘徽治学的重大特点。整个刘徽注文必有据，不讲空话。历来有“隶首作数”的说法，刘徽说“其详未之闻也”。汉代盛行讖纬迷信，出现数字神秘主义，大科学家张衡也未能免俗，刘徽批评他是“欲协其阴阳奇耦之说而不顾疏密矣”。刘徽把自己的数学知识和创造完全建立在必然性基础之上，没有任何猜测或神秘的成分。

刘徽认为人们的数学知识是不断进步的，他不迷信古人。《九章算术》最迟在东汉已被官方奉为经典，刘徽为之作注，自然对之很推崇。但他并不妄从，指出了它若干不准确之处甚或错误。刘徽是在中国数学史上批评《九章算术》最多的数学家。

敢于创新，是刘徽治学的突出特点，这是他实事求是精神的升华。刘徽《九章算术注》的创新非常多。在一部著作中，新的思想、

新的方法、新的成就这么多，在中国数学史上是少见的。

刘徽还具有知之为知之，不知为不知，不图虚名，敢于承认自己的不足，寄希望于后学的高尚品格。他对自己设计的牟合方盖，功亏一篑，没能求出其体积，便老老实实地承认：“欲陋形措意，惧失正理，敢不阙疑，以俟能言者。”反映了一位真正的科学家的光辉本色。

刘徽还善于灵活运用数学方法，指出不弄通数学原理，“徒按本术”，是“胶柱调瑟”，就像把琴瑟的弦的转柱胶住而要调节弦的音律。他常常在《九章算术》的术文之外，提出另外的方法，或者对《九章算术》的同一条术文，记下不同的思路。有时候他明知自己提出的新方法不如原来的方法简便，为什么还要提出呢？他说：“广异法也。”要广开思路。

### 《九章算术注》的结构和成就

刘徽的《九章算术注》是不是全都反映了刘徽的思想呢？学术界实际上存在着不同意见。刘徽自述注《九章算术》的过程时说：

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。

这说明，《九章算术注》中含有两种内容：一