高中数学思想方法之数形结合的思想

王亮

一、思想方法概述

1．数形结合的数学思想：包含“以形助数”和“以数辅形”

两个方面，其应用大致可以分为两种情形：

一是借助形的生动性和直观性来阐明数之间的联系，即以“形”作为手段，“数”作为目的，比如应用函数的图象来直观地说明函数的性质；

二是借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性，即以“数”作为手段，“形”作为目的，如应用曲线的方程来精确地阐明曲线的几何性质．

2．运用数形结合思想分析解决问题时，要遵循三个原则：

(1)等价性原则．在数形结合时，代数性质和几何性质的转换必须是等价的，否则解题将会出现漏洞．有时，由于图形的局限性，不能完整的表现数的一般性，这时图形的性质只能是一种直观而浅显的说明，要注意其带来的负面效应．

(2)双方性原则．既要进行几何直观分析，又要进行相应的代数抽象探求，仅对代数问题进行几何分析容易出错．

(3)简单性原则．不要为了“数形结合”而数形结合．具体运用时，一要考虑是否可行和是否有利；二要选择好突破口，恰当设参、用参、建立关系、做好转化；三要挖掘隐含条件，准确界定参变量的取值范围，特别是运用函数图象时应设法选择动直线与定二次曲线．

3．数形结合思想解决的问题常有以下几种：

(1)构建函数模型并结合其图象求参数的取值范围；

(2)构建函数模型并结合其图象研究方程根的范围；

(3)构建函数模型并结合其图象研究量与量之间的大小关系；

(4)构建函数模型并结合其几何意义研究函数的最值问题和证明不等式；

(5)构建立体几何模型研究代数问题；

(6)构建解析几何中的斜率、截距、距离等模型研究最值问题；

(7)构建方程模型，求根的个数；

(8)研究图形的形状、位置关系、性质等．

4．数形结合思想是解答高考数学试题的一种常用方法与技巧，

特别是在解填空题时发挥着奇特功效，这就要求我们在平时学习中加强这方面的训练，以提高解题能力和速度．具体操作时，应注意以下几点：

(1)准确画出函数图象，注意函数的定义域；

(2)用图象法讨论方程(特别是含参数的方程)的解的个数是一种行之有效的方法，值得注意的是首先要把方程两边的代数式看作是两个函数的表达式(有时可能先作适当调整，以便于作图)，然后作出两个函数的图象，由图求解.

5．在运用数形结合思想分析问题和解决问题时，需做到以下四点：

(1)要彻底明白一些概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征；

(2)要恰当设参，合理用参，建立关系，做好转化；

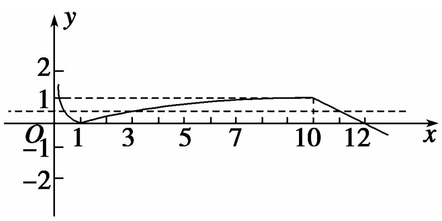
(3)要正确确定参数的取值范围，以防重复和遗漏；

(4)精心联想“数”与“形”，使一些较难解决的代数问题几何化，几何问题代数化，以便于问题求解.

二、高考真题感悟

已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & 0<x\le 10,\\ -\frac{1}{2}x+6, & x>10,\end{cases}$ 若 a，b，c 互不相等，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 abc 的取值范围是__________.

解：画出函数 $f(x)$的图象，如下图所示：



由图象知，要使 $f(a)=f(b)=f(c)$，不妨设 $a<b<c$，则 $-\lg a=\lg b=-\frac{1}{2}c+6$.∴$\lg a+\lg b=0$，∴$ab=1$，∴$abc=c$.由图知 $10<c<12$，∴$abc\in(10,12)$.

考题分析

本小题考查了分段函数的特征及性质、对数函数及其运算．重点考查了解决问题的方法即数形结合的思想方法．体现了对知识和能力的双重考查.

三、热点分类突破

题型一　数形结合思想在解决方程的根、不等式解集问题中的应用

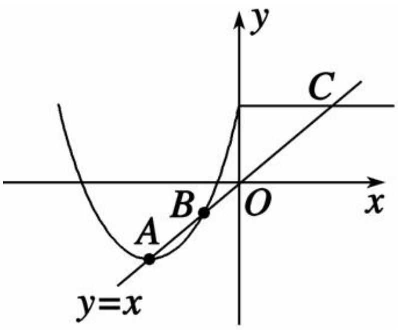
例 1　(1)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\le 0,\\ 2, & x>0.\end{cases}$ 若 $f(-4)=f(0)$，$f(-2)=-2$，则函数 $y=g(x)=f(x)-x$ 的零点个数为_____.

(2)使 $\log_2(-x)<x+1$ 成立的 x 的取值范围是________.

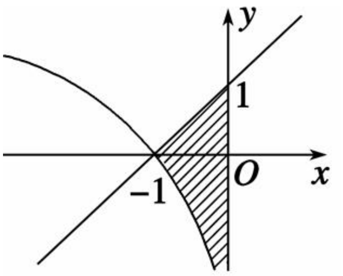
解 (1)由 $f(-4)=f(0)$，得 $16-4b+c=c$.由 $f(-2)=-2$，得 $4-2b+c=-2$.

联立两方程解得：$b=4$，$c=2$.于是，$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+2, & x\le 0,\\ 2, & x>0.\end{cases}$

在同一直角坐标系内，作出函数 $y=f(x)$与函数 $y=x$ 的图象，知它们有 3 个交点，进而函数亦有 3 个零点.



(2)在同一坐标系中，分别作出 $y=\log_2(-x)$，$y=x+1$ 的图象，由图可知，x 的取值范围是$(-1,0)$.

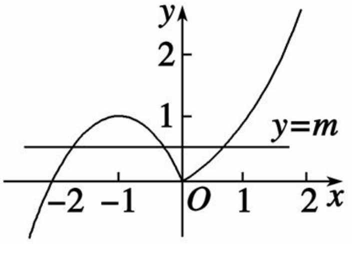


题型二 数形结合思想在求参数、代数式取值范围问题中的应用

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x>0,\\ -x^2-2x, & x\le 0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有 3 个零点，则实数 m 的取值范围为__________.

思维启迪 作出分段函数 $f(x)$的图象，观察图象与 $y=m$ 的交点个数.

解 函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x>0,\\ -x^2-2x, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}2^x-1, & x>0,\\ -(x+1)^2+1, & x\le 0,\end{cases}$ 画出其图象如图所示.



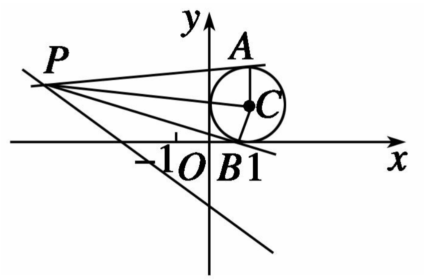
又由函数 $g(x)=f(x)-m$ 有 3 个零点，知 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 有 3 个交点，则实数 m 的取值范围是 $(0,1)$.

探究提高

解决函数的零点问题，通常是转化为方程的根，进而转化为函数的图象的交点问题．在解决函数图象的交点问题时，常用数形结合，以“形”助“数”，直观简洁．

题型三　数形结合思想在求几何量中最值问题中的应用

例 3　已知 P 是直线 $3x+4y+8=0$ 上的动点，PA、PB 是圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的两条切线，A、B 是切点，C 是圆心，求四边形 $PACB$ 面积的最小值．



思维启迪　在同一坐标系中画出直线与圆．作出圆的切线 PA、PB，则四边形 $PACB$ 的面积 $S_{\text{四边形}PACB}=S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}=2S_{\triangle PAC}$.把 $S_{\text{四边形}PACB}$ 转化为 2 倍的 $S_{\triangle PAC}$ 可以有以下多条数形结合的思路．

$\boxed{\text{画出对应图形}}\rightarrow\boxed{\text{利用数形结合明确所求}}\rightarrow\boxed{\text{求解得结果}}$

解　方法一从运动的观点看问题，当动点 P 沿直线 $3x+4y+8=0$ 向左上方或向右下方无穷远处运动时，直角三角形 PAC 的面积 $S_{\text{Rt}\triangle PAC}=\frac{1}{2}PA\cdot AC=\frac{1}{2}PA$ 越来越大，从而 $S_{\text{四边形}PACB}$ 也越来越大；当点 P 从左上、右下两个方向向中间运动时，$S_{\text{四边形}PACB}$ 变小，

显然,当点 P 到达一个最特殊的位置，即 CP 垂直直线时，$S_{\text{四边形}PACB}$ 应有唯一的最小值，

此时 $PC=\frac{|3\times1+4\times1+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，从而 $PA=\sqrt{PC^2-AC^2}=2\sqrt{2}$.$\therefore(S_{\text{四边形}PACB})_{\min}=2\times\frac{1}{2}\times PA\times AC=2\sqrt{2}$.

方法二　利用等价转化的思想，设点 P 的坐标为$(x，y)$，

则 $PC=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$，由勾股定理及 $AC=1$，得 $PA=\sqrt{PC^2-AC^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2-1}$，

从而 $S_{\text{四边形}PACB}=2S_{\triangle PAC}=2\cdot\frac{1}{2}PA\cdot AC=PA=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2-1}$，

从而欲求 $S_{\text{四边形}PACB}$ 的最小值，只需求 PA 的最小值，只需求 $PC^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最小值，

即定点 $C(1,1)$与直线上动点 $P(x，y)$距离的平方的最小值，它也就是点 $C(1,1)$到直线 $3x+4y+8=0$ 的距离的平方，这个最小值 $d^2=(\frac{|3\times1+4\times1+8|}{\sqrt{3^2+4^2}})^2=9$，

$\therefore(S_{四边形PACB})_{\min}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.

方法三　利用函数思想，将方法二中

$S_{四边形PACB}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2-1}$中的 y 由 $3x+4y+8=0$ 解出，代入化为关于 x 的一元二次函数，进而用配方法求最值，也可得$(S_{四边形PACB})_{\min}=2\sqrt{2}$.

探究提高 本题的解答运用了多种数学思想方法:数形结合思想，运动变化的思想，等价转化的思想以及函数思想，灵活运用数学思想方法，能使数学问题快速得以解决.

四、规律方法总结

1．利用数形结合解题，只需把图象大致形状画出即可，不需要精确图象.

2．数形结合思想是解决高考数学试题的一种常用方法与技巧，特别在解填空题时更方便，可以提高解题速度.

3．数形结合思想常用模型：一次、二次函数图象；斜率公式；两点间的距离公式(或向量的模、复数的模)；点到直线的距离公式等.

评语：本文有理论概括同时又不失实用性，配以例题逐一解析，分类得当，讲析透彻，有一定的指导性

评审结果：录用刊发